如何解題：一些高中數學的進階解題技術

法蘭克老師

1 極值問題

研究函數的極值是中學數學的一個重要的課題，找尋函數的極值目的就是要研究函數的性質．它所涉及的層面相當管，這裡要講得不涉及微積分．

1.1 一般性的極值問題

例題 1.1 已知x_1, x_2是二次方程

$$x^2 - (k-2)x + (k^2 + 3k + 5) = 0$$

的兩個實根，其中$k \in \mathbb{R}$．則$x_1^2 + x_2^2$的最大值為多少？

解答：如果x_1, x_2是方程的實根，此時，我們必須要求判別式

$$D = (k-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k^2 + 3k + 5) \geq 0.$$

也就是說，我們要求$3k^2 + 16k + 16 \leq 0$.解出後，我們得到k的範圍是$-4 \leq k \leq -3/4$.又利用韋達定理，我們知道

$$x_1 + x_2 = k - 2, \quad x_1 x_2 = k^2 + 3k + 5.$$

利用$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$可得

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (k-2)^2 - 4(k^2 + 3k + 5) \\ &= -3k^2 - 16k - 16 \\ &= -3\left(k + \frac{8}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

作圖後，我們發現，在$[-4, -3/4]$內$x_1^2 + x_2^2$的最大值是$16/3$.此時$k = -8/3$．

1.2 利用二次函數的判別式

例題 1.2 求函數

$$y = \frac{2x}{x^2 + x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

的極值．

解答：將兩邊同乘y後，移項得到

$$yx^2+(y-2)x+y=0.$$

由於我們要求x是實數，上述方程的判別式

$$D=(y-2)^2-4\cdot y\cdot y\geq 0.$$

可以推得$3y^2+4y-4\leq 0.$求出

$$-2\leq y\leq \frac{2}{3}.$$

例題 1.3 求函數

$$y=x+4+\sqrt{5-x^2},\quad -\sqrt{5}\leq x\leq\sqrt{5}$$

的極值．

解答：將$x+4$移項至左邊後，兩邊平方得

$$(y-x-4)^2=5-x^2.$$

整理後:

$$2x^2+(8-2y)x+y^2-8y+11=0.$$

由於x是實數，

$$D=(8-2y)^2-4\cdot 2\cdot(y^2-8y+11)\geq 0.$$

可以解得y的範圍．

例題 1.4 若$x,y\in\mathbb{R}$,且$3x^2+2y^2-6x=0$．試求出x^2+y^2的最大值．

解答：配方後可得

$$3(x-1)^2+2y^2=3.$$

所以$0\leq x\leq 2$且$-\sqrt{3/2}\leq y\leq\sqrt{3/2}$.利用等式可以求出

$$y^2=\frac{6x-3x^2}{2}.$$

於是

$$x^2+y^2=x^2+\frac{6x-3x^2}{2}=-\frac{1}{2}x^2+3x=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2}.$$

所以我們必須求出

$$x\mapsto -\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{9}{2},\quad 0\leq x\leq 2$$

的極值．作圖後發現，當$x=2$時，函數有極值4．

1.3 變數變換法

例題 1.5 試利用變數變換法解例題1.4.

解答：可以使用$y = 1 + \cos\theta$, $y = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.帶入後

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \frac{3}{2}\sin^2\theta \\ &= -\frac{1}{2}\cos^2\theta + 2\cos\theta + \frac{5}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(\cos\theta - 2)^2 + \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

作圖後發現，最大值為4發生在$\cos\theta = 1$時・

例題 1.6 試求

$$y = \frac{1 + 2\sin x}{3 + \sin x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

的值域

解答：令

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

帶入後

$$y = \frac{1 + 2\frac{2t}{1+t^2}}{3 + \frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^2 + 4t + 1}{3t^2 + 2t + 3}.$$

接著可以使用判別式法來求出y的極值・或交叉相乘後解出

$$\sin x = \frac{1 - 3y}{y - 2}.$$

利用$|\sin x| \le 1$也可以解出y的範圍・

這個變數變換的來源是：

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} \\ &= 2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

我們令$t = \tan x/2$・由於$x \in \mathbb{R}$, $-\infty < t < \infty$.

例題 1.7 若$x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$,其中$x, y \in \mathbb{R}$・試求出$3x^2 + 2xy + y^2$的最大值・

解答：令$x=\cos\theta$且$y=2\sin\theta$帶入$3x^2+2xy+y^2$後可得

$$3x^2+2xy+y^2=3\cos^2\theta+4\cos\theta\sin\theta+4\sin^2\theta.$$

利用倍角公式

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2},\quad \cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2},\quad \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

可得

$$3\cos^2\theta+4\cos\theta\sin\theta+4\sin^2\theta=-\frac{1}{2}\cos 2\theta+2\sin 2\theta+\frac{7}{2}.$$

利用輔助角公式：

$$-\frac{1}{2}\cos 2\theta+2\sin 2\theta+\frac{7}{2}=\frac{\sqrt{17}}{2}\cos(2\theta-\psi)+\frac{7}{2}.$$

可知最大值為$\dfrac{\sqrt{17}}{2}+\dfrac{7}{2}$.

例題 1.8 若p,q為實數且$|p|\le 1,\ |q|\le 1$．試求函數

$$f(p,q)=pq+\sqrt{(1-p)^2(1-q)^2}$$

的最大值．

解答：令$p=\cos\alpha$且$q=\cos\beta$則

$$f(p,q)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta).$$

於是最大值為1．

1.4 不等式法

例題 1.9 假設$x_1,\cdots,x_n$均為實數，且滿足$\sum_{k=1}^{n}x_k=1$.試求$\sum_{k=1}^{n}x_k^2$的最小值．

解答：使用科西不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2\le n\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^2.$$

例題 1.10 設x,y,z為滿足$x+y+z=1$的實數．求函數$f(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2$的最小值．

解答：利用科西不等式

$$(x+y+z)^2\le(2x^2+3y^2+z^2)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1\right).$$

1.5 解析幾何法

例題 1.11 求函數

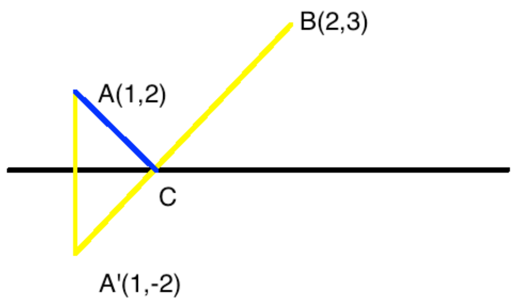
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 13}, x \in \mathbb{R}$$

的最小值．

解答：配方後

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 2^2} + \sqrt{(x-2)^2 + 3^2}.$$

作圖後發現．$f(x)$為$C(x, 0)$到兩點$A(1, 2)$與$B(2, 3)$的距離和也就是說$f(x) = \overline{AC} + \overline{BC}$.利用國中時的幾何法．我們可以求出何時距離最短．做法如下：令A'表示A對X軸的對稱點$(1, -2)$．則$\overline{AC} = \overline{A'C}$．所以$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{A'C} + \overline{BC}$.平面幾何中，兩點之間的最短距離為直線．因此$A'$與$B$之間的最短距離為$\overline{A'B}$．如圖所示：



此時，最短距離為點$(1, -2)$到$(2, 3)$的距離：$\sqrt{(1-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{26}$．

例題 1.12 求函數

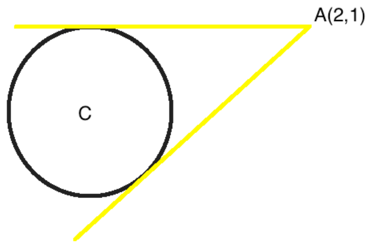
$$m = \frac{1 + \sin\theta}{2 + \cos\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

的極值．

解答：我們把m視為$(2, 1)$到$(-\cos\theta, -\sin\theta)$的斜率．而$(-\cos\theta, -\sin\theta)$在圓

$$C : x^2 + y^2 = 1$$

上．如圖所示



也就是說，我們可以求出所有通過$(2,1)$並與C相交的直線的斜率．極值發生在直線與圓C相切時．假設$y=m(x-2)+1$.相切時，圓心到直線的距離為半徑：

$$\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=1.$$

此時$m=0$, $m=4/3$．所以$0\le m\le 3/4$.

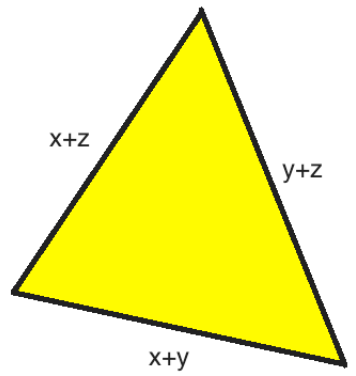
2　構造法解題

例題 2.1 假設$x, y, z \in \mathbb{R}_+$. 滿足

$$xyz(x+y+z)=1$$

求$(x+y)(x+z)$的最小值．

解答：我們可以利用$x+y, y+z, x+z$構造出三角形A, B, C的三邊$a=x+y, b=y+z, c=x+z$．如圖所示



利用海龍公式此三角形的面積為

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{xyz(x+y+z)}=1,$$

其中$s=(a+b+c)/2=x+y+z$，且$s-a=z,\ s-b=x,\ s-c=y$．又$\Delta=\frac{1}{2}ac\sin B$．因此

$$(x+y)(y+z)=\frac{2}{\sin B}=2\sec B\geq 2.$$

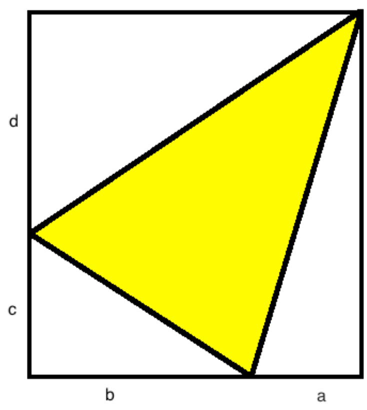
所以$(x+y)(y+z)\geq 2.$

例題 2.2 假設$a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$．存在一個三角形其三邊分別為

$$\sqrt{b^2+c^2},\quad \sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd},\quad \sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$$

並求出此三角形面積．

解答：如圖所示



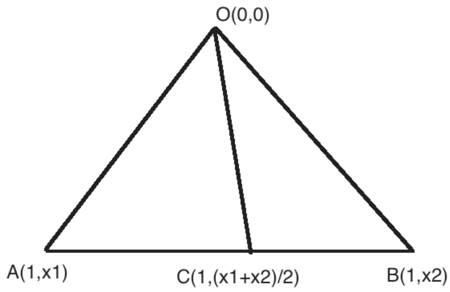
面積為

$$(a+b)(c+d)-\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}a(c+d)-\frac{1}{2}d(a+b).$$

例題 2.3 試證明：對任意的實數x_1, x_2恆有

$$2\sqrt{1+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}\leq\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}.$$

解答：如圖所示，這個不等式等價於三角形兩邊和大於兩倍中線長。



如果令$O(0,0)$, $A(1,x_1)$, $B(1,x_2)$，則A,B中點座標為$C(1,\dfrac{x_1+x_2}{2})$.於是

$$\overline{OA}=\sqrt{1+x_1^2},\quad \overline{OB}=\sqrt{1+x_2^2},\quad \overline{OC}=\sqrt{1+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}.$$

不等式等價於$\overline{OA}+\overline{OB}\geq 2\overline{OC}$.

例題 2.4 試證明下列恆等式:

$$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)=(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_2b_1+a_1b_2)^2.$$

其中a_1,a_2,b_1,b_2均為實數・

解答：令$z=a_1+ib_1$且$w=a_2+ib_2$為兩複數・則$zw=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_2b_1+a_1b_2)$.我們知道複數絕對值的性質

$$|z|^2=a_1^2+b_1^2,\quad |w|^2=a_2^2+b_2^2,\quad |zw|^2=(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_2b_1+a_1b_2)^2.$$

於是原式等價於

$$|z|^2|w|^2=|zw|^2.$$

3 特殊形式的方程式

3.1 變數變換

例題 3.1 解方程組

$$\begin{cases} 2xy-5\sqrt{xy+1} &= 10 \\ x^2+y^2 &= 10 \end{cases}.$$

解答：令$p=x+y$且$q=xy$，則原式等價於

$$2q-5\sqrt{q+1}=10, \quad p^2-4q=10.$$

利用$(2q-10)^2=25(q+1)$後可以解出q接著可以解出p。

例題 3.2 若$a,b,c\neq 0$，試求下列方程的解

$$\frac{x}{x+a}=\frac{y}{y+b}=\frac{z}{z+c}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

解答：觀察$\dfrac{x}{x+a}=1-\dfrac{a}{x+a}$.利用前三個式子，可以推出

$$\frac{a}{x+a}=\frac{b}{y+b}=\frac{c}{z+c}.$$

取倒數後$\dfrac{x+a}{a}=\dfrac{y+b}{b}=\dfrac{z+c}{c}$.類似可得$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=t$, 令為$t$。於是$x=at$, $y=bt$, $z=ct$帶入最後一個式子後，我們得到$t^2=\dfrac{t}{t+1}$. 於是

$$t(t^2+t-1)=0.$$

若$t=0$,則$x=y=z=0$。若$t\neq 0$則$t^2+t-1=0$.可以解得 $t=\dfrac{-2\pm\sqrt{5}}{2}$.

3.2 構造輔助方程

例題 3.3 解方程

$$\sqrt{2x+7}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+5}+\sqrt{3x+1}.$$

解答：觀察

$$\frac{1}{\sqrt{2x+7}+\sqrt{2x+3}}=\frac{\sqrt{2x+7}-\sqrt{2x+3}}{4}$$

同理

$$\frac{1}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{3x+1}}=\frac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x+1}}{4}.$$

所以上面等是取倒數後，我們推得

$$\sqrt{2x+7}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x+1}.$$

與原式相加後，得到$\sqrt{2x+7}=\sqrt{3x+5}$.且得到$\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+1}$.解出$x=2$.

例題 3.4 解方程

$$\sqrt{3x^2-5x-12}-\sqrt{2x^2-11x+15}-x+3=0.$$

解答：令$a=3x^2-5x-12$且$b=2x^2-11x+15$．則上式可得

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=x-3.$$

如果$x=3$,則

$$\sqrt{3x^2-5x-12}-\sqrt{2x^2-11x+15}=0=x+3.$$

於是$x=3$為方程的一解．假設$x\neq 3$利用乘法公式

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{x^2+6x-27}{x-3}=\frac{(x-3)(x+6)}{x-3}=x+3.$$

於是在$x\neq 3$時，我們有以下聯立方程

$$\left\{\begin{array}{rcl}\sqrt{a}-\sqrt{b} & = & x-3\\ \sqrt{a}+\sqrt{b} & = & x+3\end{array}\right..$$

於是我們得到

$$\sqrt{3x^2-5x-12}=x,\quad \sqrt{2x^2-11x+15}=3.$$

利用$\sqrt{3x^2-5x-12}=x$我們求出$x=-3/2$(要求$x>0$)與$x=4$．但$\sqrt{2\cdot 4^2-11\cdot 4+15}=\sqrt{3}\neq 3$．所以我們推論出$x=3$是方程的唯一解．

例題 3.5 解方程

$$x^2-6x-6+x\sqrt{x^2-2x-2}=0.$$

解答：讀者練習．

4 不等式

給定兩個實數a, b，要證明$a > b$我們只需證明$a-b > 0$．在$b > 0$的時候，我們也可以由$a/b > 1$推得．我們可以使用一個常見的等式:當$x, y, z \geq 0$時，

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geq 0. \tag{4.0}$$

例題 4.1 假設$x, y, z \in \mathbb{R}$．證明

$$\begin{gathered}(x^2 + y^2 + z^2)[(x^2 + y^2 + z^2)^2 - (xy + yz + xz)^2] \geq \\ (x + y + z)^2[(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + xz)]^2.\end{gathered}$$

證明：我們令$a = x + y + z$且$b = xy + yz + xz$．則$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - 2b$. 原不等式等價於

$$(a^2 - 2b)((a^2 - 2b)^2 - b^2) \geq a^2(a^2 - 3b)^2$$

我們只需驗證

$$(a^2 - 2b)((a^2 - 2b)^2 - b^2) - a^2(a^2 - 3b)^2 \geq 0$$

即可．又$(a^2 - 2b)^2 - b^2 = (a^2 - 3b)(a^2 - b)$．所以

$$\begin{aligned}(a^2 - 2b)((a^2 - 2b)^2 - b^2) - a^2(a^2 - 3b)^2 &= (a^2 - 2b)(a^2 - 3b)(a^2 - b) - a^2(a^2 - 3b)^2 \\ &= (a^2 - 3b)[(a^2 - 2b)(a^2 - b) - a^2(a^2 - 3b)] \\ &= (a^2 - 3b)(a^4 - 3a^2b + 4b^2 - a^4 + 3a^2b) \\ &= (a^2 - 3b)4b^2.\end{aligned}$$

由(4)

$$a^2 - 3b = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \geq 0.$$

於是我們驗證了不等式．

例題 4.2 在三角形ΔABC中，證明

$$\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} \geq 1.$$

證明：在三角形中

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1.$$

於是證明原不等式，等價於證明

$$\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} - \left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right) \geq 0.$$

如果我們令$x = \tan(A/2)$, $y = \tan(B/2)$且$z = \tan(C/2)$．則上述不等式等價於(4)

例題 4.3 給定三角形ΔABC三邊長分別為a, b, c・記Δ為此三角形面積・證明

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta.$$

證明：要證明不等式，等於要證明

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\Delta \geq 0. \tag{4.0}$$

利用餘弦定理與面積公式

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C, \quad \Delta=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

我們將(4)可以改寫：

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\Delta &= 2(a^2+b^2)-2ab\cos C-2ab\sqrt{3}\sin C \\ &= 2(a^2+b^2-ab\cos C-ab\sqrt{3}\sin C) \\ &= 2(a^2+b^2-2ab\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)) \\ &\geq 2(a^2+b^2-2ab) \\ &= 2(a-b)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

此處，我們使用了正餘弦疊合

$$\cos C+\sqrt{3}\sin C=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos C+\cos\frac{\pi}{6}\sin C\right)=2\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right).$$

例題 4.4 (算幾不等式)在ΔABC中，證明

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}.$$

證明：做三角形內切圓切於D, E, F三點分別在$\overline{AB}, \overline{BC}$與$\overline{AC}$上・令$r$表示內切圓半徑，$\overline{AD}=x$, $\overline{BD}=y$與$\overline{CD}=z$・則

$$\cot\frac{A}{2}=\frac{x}{r}, \quad \cot\frac{B}{2}=\frac{y}{r}, \quad \cot\frac{C}{2}=\frac{z}{r}.$$

令s為半周長，則$s=x+y+z$・利用海龍公式，可求出面積Δ滿足

$$\Delta^2=xyz(x+y+z).$$

利用內切圓，可知三角形面積為$sr=(x+y+z)r$.所以$(x+y+z)^2r^2=xyz(x+y+z)$.推得

$$r^2=\frac{xyz}{x+y+z}.$$

因此

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{x+y+z}{r}=(x+y+z)\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}}=\frac{(x+y+z)^{3/2}}{(xyz)^{1/2}}.$$

利用算幾不等式

$$x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}.$$

所以$(x+y+z)^{3/2}\geq 3^{3/2}(xyz)^{1/2}$.也就得到了原不等式・

例題 4.5 (柯西不等式)假設$x_1,\cdots,x_n$是非負實數・證明

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geq x_1+\cdots+x_n.$$

證明：定義$x_{n+1}=x_1$・利用科西不等式，我們可以驗證

$$\frac{x_{k-1}^2}{x_k}+x_k\geq 2x_{k-1}.$$

所以

$$\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{x_{k-1}^2}{x_k}+x_k\right)\geq 2\sum_{k=2}^{n+1}x_{k-1}.$$

由於$\sum_{k=2}^{n+1}x_{k-1}=\sum_{k=2}^{n+1}x_k$，我們證明了

$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{x_{k-1}^2}{x_k}\geq\sum_{k=2}^{n+1}x_{k-1}.$$