國立成功大學數學系
113學年度學士班申請入學
數學筆試(一)

113年5月18日
9:30 ~ 10:50

1. 本試卷共6大題計算證明題
2. 請在每一題所屬頁面寫出完整解答過程

姓名	
申請入學 編號	
總分	

題號	1	2	3	4	5	6
配分	15	15	15	20	15	20
得分						

1. 兩個數列 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 定義如下：

$$a_1 = 2^3，a_2 = 2^{3^2} = 2^{(3^2)}，a_3 = 2^{3^{2^3}} = 2^{(3^{2^3})}，\ldots$$

$$b_1 = 3^2，b_2 = 3^{2^3} = 3^{(2^3)}，b_3 = 3^{2^{3^2}} = 3^{(2^{3^2})}，\ldots$$

(8%) 當 $n = 2, 3$ 時，試決定 a_n 與 b_n 的大小。($\log 2 \approx 0.301, \log 3 \approx 0.477$)

(7%) 對於一般的正整數 n，試推論 a_n 與 b_n 的大小。(需給予說明否則不計分。)

2. 小明收集了 20 位同學的身高 x_i 以及手長 y_i 的資料 (x_i, y_i) 如下：

(151, 57)	(151, 57)	(153, 56)	(153, 56)	(154, 56)
(155, 55)	(155, 57)	(156, 56)	(156, 57)	(157, 56)
(158, 59)	(159, 58)	(160, 59)	(161, 57)	(162, 57)
(162, 61)	(163, 62)	(163, 60)	(165, 61)	(166, 63)

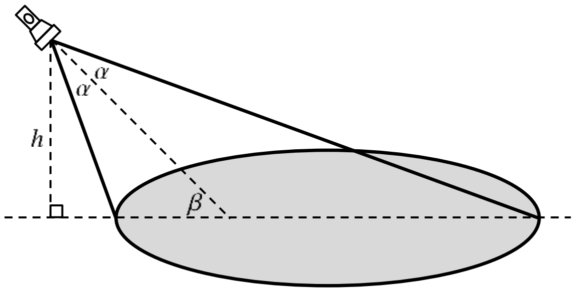
(8%) 試求平均身高 μ_X 與平均手長 μ_Y。

(7%) 試求手長對身高的迴歸直線方程式 $y = mx + b$。

3. 一手電筒的照明燈光為與中軸夾角 $\alpha = 30^\circ$ 的直圓錐。某人持手電筒在高度 $h = 1$ 公尺以俯角 $\beta = 45^\circ$ 朝地面照明一橢圓形區域。

(12%) 試求此橢圓的半長軸 a 與半短軸 b 長度。(提示：令地面為 xy 平面，手電筒在 z 軸上，中軸在 xz 平面上，即可求橢圓方程式)

(3%) 請問中軸與地面的交點是否為橢圓的焦點?

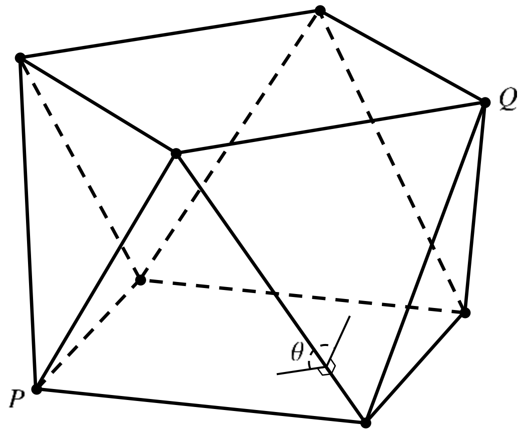


4. 四角反稜柱是一種等邊多面柱體，其上下底面為正方形，側面由八個正三角形交錯圍繞而成，若將上底面正方形旋轉 45 度後再垂直投影即為下底面正方形。已知四角反稜柱的所有邊長為 1，試回答下列問題。

(6%) 試求上下底面的距離。

(7%) 試求上下兩相對頂點(例如圖中點 P, Q)的距離。

(7%) 試求兩相鄰正三角形的夾角(例如圖中 θ)的餘弦值。



5. 均值定理敘述如下：若函數 $f(x)$ 在有界閉區間 $[a,b]$ 上連續並且在 (a,b) 上可微，則 (a,b) 上存在一點 c 使得 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

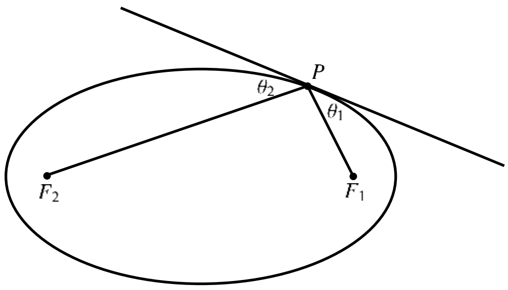
(5%) 給定函數 $f(x)=x^2$，請具體找出定理敘述中的 c。(以 a,b 表示)

(10%) 試證明：方程式 $x^5-x^3+5x+8=0$ 至多僅有一實根。(提示：假設有相異兩實根，已知多項式函數連續且可微，利用均值定理推導出矛盾。)

6. 給定實數 $a>b>0$，平面上橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的兩焦點為 $F_1(c,0),F_2(-c,0)$。令 $P(u,v)$ 為橢圓上的任意一點。

(8%) 試證明：線段 $\overline{F_2P}$ 的長度可表示為 $a+\dfrac{c}{a}u$。

(12%) 令橢圓在點 P 的切線與線段 $\overline{F_1P},\overline{F_2P}$ 的夾角分別為 θ_1,θ_2，已知橢圓在點 P 的切線斜率為 $m=-\dfrac{b^2u}{a^2v}$，試證明：$\theta_1=\theta_2$。



國立成功大學數學系
113 學年度學士班申請入學
數學筆試 (二)

113 年 5 月 18 日
11:00 ~ 12:20

1. 本試卷共 11 題單選題/多選題/填充題
2. 請在本頁下方作答區填入答案

姓名	
申請入學編號	
總分	

題號	1	2	3	4	5	6
答案						
得分						

題號	7	8	9	10	11
答案					
得分					

說明：第 1, 2 題為單選題，每題 5 分；第 3, 4 題為多選題，每題 10 分，每個選項答錯扣 4 分，扣至最低 0 分；第 5~11 題為填充題，每題 10 分。

1. [單選題] 複數平面上給定一非零複數 z，考慮 z 與以下選項中的複數所決定的直線，請問那個直線**不可能**通過原點?

(A) z^2 (B) $\dfrac{z}{2-i}$ (C) $\dfrac{1}{\bar{z}}$ (D) $\dfrac{iz}{\bar{z}}$ (E) $2z$

2. [單選題] 對於下列哪個實數 α 存在正整數 n 使得 $(\sin\alpha + i\cos\alpha)^n$ 為實數?

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) 2 (C) $\sqrt{2}\pi$ (D) $\dfrac{5}{7}\pi$ (E) $\dfrac{2}{5\pi}$

3. [多選題] 下列不等式哪些是正確的?

(A) $1+\cos 2^\circ > 2\cos 1^\circ$

(B) $\tan 2^\circ > 2\tan 1^\circ$

(C) $\log_{2024} 2023 + \log_{2024} 2025 > 2$

(D) $\log_{2025} 2023 + \log_{2023} 2025 > 2$

(E) $2023^{2024} + 2025^{2024} > 2\cdot 2024^{2024}$

4. [多選題] 利用二項式展開 $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n x^k$ 檢驗下列哪些組合連加式成立。

(A) $\sum_{k=0}^{1012}C_{2k}^{2024}=2^{2023}$

(B) $\sum_{k=0}^{1011}C_{2k+1}^{2024}=2^{2022}$

(C) $\sum_{k=0}^{2024}3^k\cdot C_k^{2024}=2^{3036}$

(D) $\sum_{k=0}^{2024}k\cdot C_k^{2024}=1012\cdot 2^{2024}$

(E) $\sum_{k=0}^{1012}(-1)^k\cdot C_{2k}^{2024}=2^{506}$ (提示：考慮 $x=i$)

5. 空間中平面 $x+by+cz=d$ 將四個點 $P(1,2,3), Q(2,3,2), R(1,4,4), S(7,6,1)$ 分隔在兩側，其中點 P, Q 在同一側，點 R, S 在另一側。若四個點各自與平面的距離都相等，試求數對 (b,c,d) 的值。

6. 空間中球面 $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=21$ 與平面 $x+y+z=9$ 相交得一圓。試求此圓與原點的最短距離。

7. 製造某產品需經過三道加工程序，其瑕疵率分別為 10%, 10%, 20% (三個瑕疵的產生不會互相影響)。產品加工完成後需經過檢測，若產品有一個瑕疵，其檢出率為 50%；若產品有二個瑕疵，其檢出率為 75%；若產品有三個瑕疵，其檢出率為 100%。沒有瑕疵或沒被檢出的產品即可上市，試求消費者買到有瑕疵產品的機率。(答案化為最簡分數)

8. 給定三次多項式 $f(x)$ 滿足 $\int_0^{2x} f(t)\,dt = x^4 - 4x^3 + ax^2 + 2b - 6$，並且 $f(x)$ 在 $x=1$ 時有局部極值，試求數對 (a,b) 的值。

9. 已知一藥物在體內的濃度 y 經過時間 t 呈現指數下降：$y(t) = c \cdot a^{-t}$，其中 a, c 為正實數。若藥物在體內一開始的濃度為 48%，經過 2 小時的濃度為 27%，試求經過幾小時的濃度為 12%? (利用 $\log 2 \approx 0.301, \log 3 \approx 0.477$ 將答案四捨五入到小數點第一位)

10. 首項係數為 c 的三次多項式 $f(x)$ 通過 $(-a,c),(0,c),(a,c)$ 三個點。若 $f(x)$ 的圖形與 x 軸只有一個交點，試求實數 a 的範圍。(以區間表示)

11. 給定 2×2 階的複數矩陣 $A=\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 1\\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\end{bmatrix}$，試求 A^{2024}。

~~~~~~~~~~ 試卷到此結束，以下內容與本次考試無關 ~~~~~~~~~~

數學系授課日常—地震波方程

為何 P 波速度大於 S 波速度 $\alpha>\beta$ 推導給你看

(seismic wave equation)

$\vec{u}(\vec{x},t):\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$

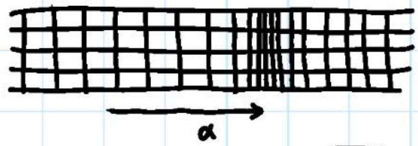
$$\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u})-\mu\nabla\times(\nabla\times\vec{u})$$

$$\nabla\cdot\vec{u}=\mathrm{div}(\vec{u})=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\nabla\times\vec{u}=\mathrm{curl}(\vec{u})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3}\\ u_1 & u_2 & u_3\end{vmatrix}$$

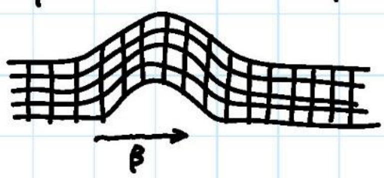
$$\frac{\partial^2(\nabla\cdot\vec{u})}{\partial t^2}=\alpha^2\Delta(\nabla\cdot\vec{u}),\ \alpha=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$$

(p-wave)



$$\frac{\partial^2(\nabla\times\vec{u})}{\partial t^2}=\beta^2\Delta(\nabla\times\vec{u}),\ \beta=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

(s-wave)


~~~~~~~~~~