8.4

3-8. Test the series for convergence or divergence.

3. $\frac{4}{7}-\frac{4}{8}+\frac{4}{9}-...$

$\Rightarrow 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+6}$ ，$a_n=\frac{1}{n+6}>0$ ，且$\{a_n\}$為遞減數列，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ，

所以依交錯級數審斂法(Alternating Series Test)，此級數收斂。

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n-1}{2n+1}$

$a_n=\frac{3n-1}{2n+1}>0$ ，但$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}\neq 0$ ，依發散判定法(Test for Divergence)，此級數發散。

9. Show that the series is convergent. How many terms of the series do we need to add in order to find the sum to the indicated accuracy? $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}$ $(|error|<0.01)$

$a_n=\frac{2^n}{n!}>0$ ，且$\{a_n\}$為遞減數列，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$(\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{n+1}<1$ ，$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\frac{2}{n-2}\cdot...\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{1}=0)$

$a_7=\frac{2^7}{7!}\approx 0.025$ ，$a_8=\frac{2^8}{8!}\approx 0.006$ ，因為第七項大於所求誤差 0.01，而第八項小於，故依照交錯級數性質，該無窮級數與前七項總合誤差小於 0.01，故取七項即可。

18. For what values of *p* is the following series convergent? $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

$a_n=\frac{1}{n^p}>0$ ，若 $p>0$ ，則$\{a_n\}$為遞減數列，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

所以依交錯級數審斂法(Alternating Series Test)，此級數收斂。

若 $p<0$ ，則$\{a_n\}$為遞增數列，$\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$

依發散判定法(Test for Divergence)，此級數發散。

19-38. Determine whether the series is absolutely convergent, conditionally convergent, or divergent.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

$a_n=\frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{5}{8}<1$ ，依比值審斂法(Ratio Test)，此級數絕對收斂。

廖彥法 整理

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$

$a_n=\frac{\cos(n\pi/3)}{n!}<\frac{1}{n!}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$絕對收斂，故依比較審斂法(Comparison Test)，，此級數絕對收斂。

35. $1-\frac{1\cdot 3}{3!}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{5!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{7!}+...+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-1)}{(2n-1)!}+...$

$a_n=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-1)}{(2n-1)!}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0<1$，依比值審斂法(Ratio Test)，此級數絕對收斂。

39. For which of the following series is the Ratio Test inconclusive (that is, it fails to give a definite answer)?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

(a) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=1$ (inconclusive)

(b) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$ (收斂)

(c) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=3\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=3>1$ (發散)

(d) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=3\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1+1/n^2}{1/n^2+(1+1/n)^2}\right]=1$ (inconclusive)

8.5

3-18. Find the radius of convergence and interval of convergence of the series.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

$a_n=\frac{x^n}{\sqrt{n}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{\sqrt{n+1}/\sqrt{n}}=|x|$

依比值審斂法(Ratio Test)，此級數欲絕對收斂，則$|x|<1$，其收斂半徑為 1。

驗證$x=\pm 1$，當$x=1$時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，$p=\frac{1}{2}<1$，此級數發散($p$ 級數審斂法)

當 $x=-1$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}}$，此級數發散(交錯級數審斂法)。

故此級數收斂區間為 $[-1,1)$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^3}$

$a_n=\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^3}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x|$

依比值審斂法(Ratio Test)，此級數欲絕對收斂，則 $|x|<1$，其收斂半徑為 1。

驗證 $x=\pm1$，當 $x=1$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$，$p=3>1$，此級數收斂($p$ 級數審斂法+交錯級數審斂法)

當 $x=-1$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$，此級數收斂($p$ 級數審斂法+交錯級數審斂法)。

故此級數收斂區間為 $[-1,1]$

11. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{4^n\ln n}$

$a_n=\frac{(-1)^n x^n}{4^n\ln n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{|x|}{4}$

依比值審斂法(Ratio Test)，此級數欲絕對收斂，則 $\frac{|x|}{4}<1$，其收斂半徑為 4。

驗證 $x=\pm4$，當 $x=4$ 時，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$，此級數收斂(交錯級數審斂法)

當 $x=-4$ 時，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}>\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ (發散)，此級數發散(比較審斂法)。

故此級數收斂區間為 $(-4,4]$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-4)^n}{n^3+1}$

$a_n=\frac{n(x-4)^n}{n^3+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x-4|$

依比值審斂法(Ratio Test)，此級數欲絕對收斂，則 $|x-4|<1$，其收斂半徑為 1。

驗證 $x=3,5$，當 $x=3$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n^3+1}$，此級數收斂(交錯級數審斂法)

當 $x=5$ 時，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$，此級數收斂(比較審斂法+$p$ 級數審斂法)。

故此級數收斂區間為$[3,5]$

19. If $\sum_{n=0}^{\infty}c_n 4^n$ is convergent, does it follow that the following series are convergent?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(-2)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(-4)^n$

(a)由$\sum_{n=0}^{\infty}c_n 4^n$ 知其級數收斂半徑為 4，故其收斂區間至少為$(-4,4]$

而$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(-2)^n$ 為公比$r=-2$，在其收斂區間內，故收斂。

(b)由前可知，此級數$\sum_{n=0}^{\infty}c_n 4^n$ 收斂不能保證$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(-4)^n$ 收斂。

25. A function f is defined by $f(x)=1+2x+x^2+2x^3+x^4+...$ that is, its coefficients are $c_{2n}=1$ and $c_{2n+1}=2$ for all $n\ge 0$. Find the interval of convergence of the series and find an explicit formula for $f(x)$.

設前 $2n$ 項為 $s_{2n}=1+2x+x^2+2x^3+x^4+...+x^{2n-2}+2x^{2n-1}=(1+2x)(1+x^2+...+x^{2n-2})$

$=(1+2x)\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}$

若要使此無窮級數收斂，則公比$r=x^2<1$，所以$-1<x<1$

且 $f(x)=\lim_{n\to\infty}s_{2n}=\lim_{n\to\infty}(1+2x)\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}=\frac{1+2x}{1-x^2},|x|<1$

29. Suppose the series $\sum c_n x^n$ has radius of convergence 2 and the series $\sum d_n x^n$ has radius of convergence 3. What is the radius of convergence of the series $\sum(c_n+d_n)x^n$?

$\sum c_n x^n$ 的收斂半徑為 2，故$-2<x<2$時，級數收斂；$\sum d_n x^n$ 的收斂半徑為 3，故$-3<x<3$時，級數收斂。故$\sum(c_n+d_n)x^n$ 要收斂，其收斂區間為$-2<x<2$，即收斂半徑為 2。

8.6

3-10. Find a power series representation for the function and determine the interval of convergence.

6. $f(x)=\dfrac{1}{1+9x^2}$

$$f(x)=\frac{1}{1+9x^2}=\frac{1}{1-(-9x^2)}\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-9x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3x)^{2n},|-9x^2|<1$$

$\Rightarrow |x|<\dfrac{1}{3}$，所以收斂半徑為$\dfrac{1}{3}$；收斂區間為$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

9. $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$

$$f(x)=\frac{x}{9+x^2}=\frac{x}{9}\frac{1}{1-(-\frac{x^2}{9})}\Rightarrow f(x)=\frac{x}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x^2}{9})^n=\frac{x}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{3})^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$$

$\Rightarrow |\dfrac{x}{3}|<1$，所以收斂半徑為 3；收斂區間為$(-3,3)$

11. Express the function as the sum of a power series by first using partial fractions. Find the interval of convergence. $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x-2}$

$$f(x)=\frac{3}{x^2+x-2}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}=\frac{-1}{1-x}-\frac{1/2}{1+x/2}=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right]x^n$$

$\dfrac{-1}{1-x}\Rightarrow -\sum_{n=0}^{\infty}x^n,|-x|<1$；$\dfrac{1/2}{1+x/2}\Rightarrow -\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\dfrac{x}{2})^n,|\dfrac{x}{2}|<1$

取其交集為收斂半徑為 1；收斂區間為$(-1,1)$

13. (a) Use differentiation to find a power series representation for $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$. What is the radius of convergence?

(b) Use part (a) to find a power series for $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^3}$

(c) Use part (b) to find a power series for $f(x)=\dfrac{x^2}{(1+x)^3}$

(a) $$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{1+x}\right)=-\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$$

收斂半徑為 1。

(b) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^3}=\frac{-1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right)=\frac{-1}{2}\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n\right]=\frac{-1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)nx^{n-1}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)(n+1)x^n$ ，收斂半徑為 1。

(c) $f(x)=\frac{x^2}{(1+x)^3}=x^2\times\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)(n+1)x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)(n+1)x^{n+2}$ ，收斂半徑為 1。

15-18. Find a power series representation for the function and determine the radius of convergence.

15. $f(x)=\ln(5-x)$

$$f(x)=\ln(5-x)=-\int\frac{dx}{5-x}=\frac{-1}{5}\int\frac{dx}{1-\frac{x}{5}}=\frac{-1}{5}\int\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{5})^n dx=\ln 5-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^n(n+1)},|\frac{x}{5}|<1$$

收斂半徑為 5。

17. $f(x)=\frac{x^3}{(x-2)^2}$

$$\frac{1}{x-2}=\frac{-1/2}{1-\frac{x}{2}}=\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n,|\frac{x}{2}|<1$$

$$\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-2}\right)=\frac{d}{dx}\left[\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}x^n$$

$\frac{x^3}{(x-2)^2}=x^3\times\frac{1}{(x-2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}x^{n+3}$ ，收斂半徑為 2。

23. Evaluate the indefinite integral as a power series. What is the radius of convergence?

$\int\frac{t}{1-t^8}dt$

$$\frac{t}{1-t^8}=t\times\frac{1}{1-t^8}=t\sum_{n=0}^{\infty}(t^8)^n=\sum_{n=0}^{\infty}t^{8n+1},|t^8|<1$$

$\int\frac{t}{1-t^8}dt=\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}t^{8n+1}\right]dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{8n+2}}{8n+2}$ ，收斂半徑為 1。

37. Let $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ Find the intervals of convergence for f, f', and f''.

令 $a_n=\frac{x^n}{n^2}$ ，則該級數收斂， $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ ，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ，故 $|x|<1$，收斂半徑為 1。

並判別 $|x|=1$，$a_n=\dfrac{(\pm1)^n}{n^2}$，該級數亦收斂($p$-級數審斂法)，故 $f(x)$ 的收斂區間為 $[-1,1]$。

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$，由級數審斂法知 $f'(x)$ 的收斂區間為 $[-1,1)$。

$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n+2}x^n$，$|x|<1$，收斂半徑為 1。當 $x=\pm1$ 時，該級數均發散，故 $f''(x)$ 的收斂區間為 $(-1,1)$。

8.7

3. If $f^{(n)}(0)=(n+1)!$ for $n=0,1,2,...$, find the Maclaurin series for f and its radius of convergence.

Maclaurin 級數為 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

若其級數收斂，則依比值審斂法知 $|x|<1$，即收斂半徑為 1。

5. Find the Maclaurin series for $f(x)=\cos x$ using the definition of a Maclaurin series. Also find the associated radius of convergence.

Maclaurin 級數為 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-...=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)}$

若其級數收斂，則依比值審斂法知 $x\in R$，即收斂半徑為 ∞。

11-18. Find the Taylor series for $f(x)$ centered at the given value of a.

11. $f(x)=1+x+x^2, a=2$

$$f(x)=7+5(x-2)+\frac{2}{2!}(x-2)^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-2)^n=7+5(x-2)+\frac{2}{2!}(x-2)^2$$

非無窮級數，故其收斂半徑為 ∞。

15. $f(x)=\cos x, a=\pi$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\pi)}{n!}(x-\pi)^n=-1+\frac{(x-\pi)^2}{2!}-\frac{(x-\pi)^4}{4!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

$a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$，$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$，依比值審斂法知 $x\in R$，即收斂半徑為 ∞。

25. Use the binomial series to expand the function as a power series. State the radius of convergence.

$\dfrac{1}{(2+x)^3}$

$$\frac{1}{(2+x)^3}=\frac{1}{8(1+x/2)^3}=\frac{1}{8}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-3}=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

binomial 係數為 $\binom{-3}{n}=\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}$

故 $\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)x^n}{2^{n+4}},|\frac{x}{2}|<1$，即收斂半徑為 2。

27-36. Use a Maclaurin series derived in this section to obtain the Maclaurin series for the given function.

33. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}=\frac{x}{2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-1/2}=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n=\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5...(2n-1)}{n!\cdot2^{3n+1}}x^{2n+1}$$

$|\frac{x^2}{4}|<1$，即收斂半徑為 2。

35. $f(x)=\sin^2 x$

$$f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$$

$a_n=\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ ，$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$，依比值審斂法知 $x\in R$ ，即收斂半徑為 ∞ 。

41. (a) Use the binomial series to expand $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) Use part (a) to find the Maclaurin series for $\sin^{-1}x$.

(a) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=[1+(-x^2)]^{-1/2}=1+\left(\frac{-1}{2}\right)(-x^2)+\frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}(-x^2)^2+...$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5...\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}$$

(b) $$\sin^{-1}x=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5...\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}\right]dx$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5...\cdot(2n-1)}{(2n+1)\cdot2^n\cdot n!}x^{2n+1}+C$$

$C=\sin^{-1}0=0$

59-64. Find the sum of the series.

59. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^4)^n}{n!}=e^{-x^4}$$

63. $3+\frac{9}{2!}+\frac{27}{3!}+\frac{81}{4!}+...$

$$3+\frac{9}{2!}+\frac{27}{3!}+\frac{81}{4!}+...=3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}-1=e^3-1$$

65. (a) Expand $f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$ as a power series.

(b) Use part (a) to find the sum of the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

(a) $\frac{1}{(1-x)^2}=[1+(-x)]^{-2}=1+(-2)(-x)+\frac{(-2)(-3)}{2!}(-x)^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}(-x)^3+...$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

(b) 當(a) $x=\frac{1}{2}$時， $f(1/2)=\frac{1/2}{(1-1/2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2$