1 線積分

假設$\mathrm{F} = P(x,y,z)\mathrm{i} + Q(x,y,z)\mathrm{j} + R(x,y,z)\mathrm{k}$,為某個區域$D$上的向量場，如力場，電場或磁場，或速度場．假設在向量場中，質點的運動軌跡方程為$C : \mathrm{r}(t) = x(t)\mathrm{i} + y(t)\mathrm{j} + z(t)\mathrm{k}$, $a \le t \le b$.

定義 1.1 質點由外力F沿著運動軌跡從$t = a$到$t = b$所做的功定義為

$$\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} = \int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{r}(t)) \cdot d\mathrm{r}(t).$$

我們也可以把F與$d\mathrm{r}$帶入後得到

$$\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

所以積分就定義為

$$\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} = \int_a^b [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

我們將此積分分解成幾個步驟：

1. 步驟一：計算$\mathrm{F}(\mathrm{r}(t))$
2. 步驟二：計算$d\mathrm{r}$
3. 步驟三：計算$\mathrm{F}(\mathrm{r}(t)) \cdot d\mathrm{r}(t)$
4. 步驟四：計算$\int_a^b \mathrm{F}(\mathrm{r}(t)) \cdot d\mathrm{r}(t)$.

範例 1.1 Find the work done by

$$\mathrm{F} = (y - x^2)\mathrm{i} + (z - y^2)\mathrm{j} + (x - z^2)\mathrm{k}$$

over the curve $\mathrm{r}(t) = t\mathrm{i} + t^2\mathrm{j} + t^3\mathrm{k}$, $0 \le t \le 1$ from $(0,0,0)$ to $(1,1,1)$.

老師講解 1 如果我們使用弧長參數化表示曲線，利用連鎖律

$$\frac{d\mathrm{r}}{dt} = \frac{d\mathrm{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \mathrm{T}\frac{ds}{dt}.$$

因此原積分可以改寫為

$$\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} = \int_C (\mathrm{F} \cdot \mathrm{T})ds.$$

稱此積分為向量場沿著曲線的流量(flow)．如果C是封閉曲線，此時的流量稱為循環(circulation)．

範例 1.2 A fluid's velocity field is

$$\mathrm{F} = x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}.$$

Find the flow along the helix $\mathrm{r}(t) = \cos t\mathrm{i} + \sin t\mathrm{j} + t\mathrm{k}$, $0 \le t \le \pi/2$.

範例 1.3 Find the circulation of the field

$$\mathrm{F} = (x - y)\mathrm{i} + x\mathrm{j}$$

around the circle $x^2 + y^2 = 1$.

老師講解 2 假設$\mathrm{F} = P(x,y)\mathrm{i} + Q(x,y)\mathrm{j}$是平面區域上$D$的電場或磁場，我們令n表示平面曲線$C$的外法向量．則我們定義通量(flux)為

$$\int_C \mathrm{F}\cdot \mathrm{N}ds = \int_C Q(x,y)dx - P(x,y)dy$$

範例 1.4 Find the flux of

$$\mathrm{F} = (x-y)\mathrm{i} + x\mathrm{j}$$

across the circle $x^2+y^2=1$.

老師講解 3 假設$f(x,y,z)$為實值連續函數，我們定義函數沿著曲線$C:\mathrm{r}(t) = x(t)\mathrm{i}+y(t)\mathrm{j}+z(t)\mathrm{k}$, $a \le t \le b$的積分為：

$$\int_C f(x,y,z)ds = \underline{\hspace{10cm}}$$

範例 1.5 Integrate $f(x,y,z)=x-3y^2+z$ over C where C is the straightline joining the origin to $(1,1,1)$.

解答：

先求出曲線方程式：$\mathrm{r}(t)=$ ____________________

求出$f(x(t),y(t),z(t))=$ ____________________

計算$|r'(t)|=$ ____________________

求出$\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))|\mathrm{r}'(t)|dt=$ ____________________

老師講解 4 如果曲線$C=C_1+C_2+\cdots+C_n$如圖所示 ：

則積分可以寫為

$$\int_C f(x,y,z)ds= \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

範例 1.6 Integrate $f(x,y,z)=x-3y^2+z$ over the curve $C=C_1+C_2$. Here $C_1:\mathrm{r}(t)=(t,t,0)$ and $C_2:\mathrm{r}(t)=(1,1,t)$.

2 向量場

假設D是空間中的一區域．D上的向量場指的是形如

$$\mathrm{F} = P(x,y,z)\mathrm{i} + Q(x,y,z)\mathrm{j} + R(x,y,z)\mathrm{k}$$

的向量值函數．

老師講解 5 假設$f(x,y,z)$是定義在D上的可微分函數．則此函數定義出來的梯度向量場為：

$\nabla f =$ ____

範例 2.1 Find the gradient field of the temperature $T(x,y,z) = 100 - x^2 - y^2 - z^2$.

$\nabla T =$ ____

老師講解 6 向量場F的旋度(curl)定義為

$\mathrm{curl}\ \mathrm{F} = \nabla \times \mathrm{F} =$ ____

老師講解 7 向量場F的散度(div)定義為

$$\text{div } \mathrm{F} = \nabla \cdot \mathrm{F} = \underline{\hspace{10cm}}$$

假設A, B是區域D中的兩點且F是區域D上的向量場・假設任給兩個連接A, B的曲線C, C'我們得到相同的積分值:

$$\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} = \int_{C'} \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r}.$$

則我們記

$$\int_A^B \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} = \underline{\hspace{10cm}}$$

此時我們稱F是D上的保守場(conservative field)・

老師講解 8 給定D上的向量場F・如果存在定義在$f(x, y, z)$上的可微分函數$\mathrm{F} = \nabla f$・則我們稱f是向量場F的位能函數(potential function)

一個自然的問題：何時向量場的位能函數會存在？當然不是所有的向量場的位能函數均存在，以下我們將來探討向量場位能存在的充要條件是什麼・

定理 2.1 假設C是區域D內連接A與B兩點的光滑曲線，並且F是D內的保守場，並且f是它的位能函數．則

$$\int_C \mathrm{F} \cdot dr = \underline{\hspace{10cm}}$$

證明：

定理 2.2 假設D是平面或空間中的單連通區域(simply connected domain)，則向量場F是保守場的充要條件是

證明：

推論 2.1 假設F是D內保守場，且C是區域D內的封閉路徑．則

$$\int_C \mathrm{F} \cdot d\mathrm{r} = \underline{\hspace{10cm}}$$

接著我們來研究一下平面區域內的保守場．假設$D \subset \mathbb{R}^2$是平面內的單連通區域．且假設$\mathrm{F} = P(x,y)\mathrm{i} + Q(x,y)\mathrm{j}$是$D$上的保守場．則存在函數$f$使得$\mathrm{F} = \nabla f$．也就是說:

$$P(x,y) = \underline{\hspace{10cm}}$$

且

$$Q(x,y) = \underline{\hspace{10cm}}$$

觀察一下我們發現

$$P_y(x,y) = \underline{\hspace{10cm}}$$

且

$$Q_x(x,y) = \underline{\hspace{10cm}}$$

假設f是光滑函數，利用

$$\underline{\hspace{12cm}}$$

我們可以推得$P_y = Q_x$.

定理 2.3 假設D是單連通區域，則$\mathrm{F} = P(x, y)\mathrm{i} + Q(x, y)\mathrm{j}$是保守場的充要條件是：

範例 2.2 假設$D = \mathbb{R}^2$且$\mathrm{F} = x^2\mathrm{i} + y^2\mathrm{j}$，是否F為$D$上的保守場？如果是，能否求出F的位能函數？

定理 2.4 假設D是三維空間中的單連通區域，且$\mathrm{F} = P(x,y,z)\mathrm{i} + Q(x,y,z)\mathrm{j} + R(x,y,z)\mathrm{k}$是$D$上的向量場，則F是$D$上的保守場的充要條件是：

範例 2.3 試驗證$\mathrm{F} = (e^x \cos y + yz)\mathrm{i} + (xz - e^x \sin y)\mathrm{j} + (xy + z)\mathrm{k}$是$\mathbb{R}^3$上的保守場，並求出F的位能函數．

3 格林定理(Green's Theorem)

定理 3.1 假設D是平面中的單連通區域，且其邊界$C = \partial D$為光滑曲線．則

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \underline{\hspace{20em}}$$

範例 3.1 計算$\oint_C -y^2dx + xydy$其中C如圖所示．

範例 3.2 計算$\oint_C y^2dx + x^2dy$其中C如圖所示．

範例 3.3 計算$\oint_C 3ydx + 2xdy$其中C如圖所示．