數學傳播 31卷3期, pp. 26-49

線性代數五講——
第二講 向量空間

龔　昇・張德健

2.1. 基底與矩陣表示

在第一講的開始, 我們就明確地指出: 線性代數是研究線性空間, 即向量空間、模和其上的線性變換以及與之相關的問題的數學學科。這一講中, 將仔細討論向量空間。關於向量空間有以下這些常規、常用的定義。

A. S 是體 $\mathbb{F}$ 上的向量空間 $\mathcal{V}$ 的部分集合, 如果將 $\mathcal{V}$ 的加法與 $\mathbb{F}$ 對 $\mathcal{V}$ 的純量乘積限制在 S 上, S 也成爲一個向量空間, 則稱 S 爲 $\mathcal{V}$ 的子空間。我們用一個簡潔的方法來看這個定義: S 爲 $\mathcal{V}$ 的子空間若且唯若

$$\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}\in S, \quad \forall\ \vec{u}, \vec{v}\in S, \quad \forall\ \alpha, \beta\in\mathbb{F}. \tag{2.1.1}$$

首先, 若 S 爲一向量空間, 則來自 $\mathcal{V}$ 上的向量加法與純量乘積必須滿足封閉性而成爲在 S 上的兩個二元運算, 故 (2.1.1)成立; 另一方面, 既然這兩個運算都是來自原來的向量空間 $\mathcal{V}$, 所以, 加法的交換律、結合律、純量乘積與加法之間的分配律當然成立, 我們只要驗證在 S 上存在加法單位元素與反元素。在 (2.1.1)中取 $\alpha=\beta=0$, 則 $\vec{0}\in S$; 若令 $\alpha=-1$ 及 $\beta=0$, 則 $-\vec{u}\in S$, 故 S 爲一向量空間。

B. 若 $\mathcal{V}_1, \ldots \mathcal{V}_n$ 是體 $\mathbb{F}$ 上的 n 個向量空間, 令

$$\mathcal{V}=\big\{(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n):\ \vec{v}_j\in\mathcal{V}_j, \quad j=1,\ldots,n\big\},$$

且在其上定義加法

$$(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n)+(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)=(\vec{v}_1+\vec{u}_1,\ldots,\vec{v}_n+\vec{u}_n),$$

$\mathbb{F}$ 對 $\mathcal{V}$ 的純量乘積爲

$$\alpha\,(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n)=(\alpha\,\vec{v}_1,\ldots,\alpha\,\vec{v}_n),$$

這裡 $\alpha \in \mathbb{F}$, 則 $\mathcal{V}$ 成爲一個向量空間, 稱爲向量空間 $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_n$ 的直和 (direct sum), 記作

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_n.$$

若 S_1 是向量空間 $\mathcal{V}$ 的一個子空間, 且有子空間 S_2, 使得 $\mathcal{V} = S_1 \oplus S_2$, 則稱 S_2 爲 S_1 的補空間 (complement)。記作 S_1^c。可證 $\mathcal{V}$ 的任一子空間一定有補空間。

C. 向量空間 $\mathcal{V}$ 中的一個 (有限) 非空部分集合 S 稱爲線性獨立 (linearly independent), 如果由

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

可導出 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, 這裡 $\vec{v}_j \in \mathcal{V}_j$, $\alpha_j \in \mathbb{F}$, $j = 1, \ldots, n$。$\mathcal{V}$ 一個部分集合如果不是線性獨立, 則稱爲線性相依 (linearly dependent)。事實上, 我們可以將這個概念推廣到有無限個元素的部分集合上去: $\mathcal{V}$ 爲一向量空間, $S \subset \mathcal{V}$, 若 S 中之任何有限個元素皆爲線性獨立, 則集合 S 稱爲線性獨立; 否則稱 S 爲線性相依。

D. 我們稱向量空間 $\mathcal{V}$ 的一個部分集合 S 生成 (span) $\mathcal{V}$, 如果 $\mathcal{V}$ 中的每個向量可以寫成 S 中的一些向量的線性組合, 即對每個 $\vec{v} \in \mathcal{V}$, 可以寫成

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$$

這裡 $\vec{v}_j \in S$, $\alpha_j \in \mathbb{F}$, $j = 1, \ldots, n$。

若 S 爲向量空間 $\mathcal{V}$ 的一個部分集合, 在 A. 中我們已討論過, S 未必是 $\mathcal{V}$ 的一個子空間; 考慮由 S 中的元素之線性組合的全體所組成的另一集合 $\langle S\rangle$, 記作

$$\langle S\rangle = \mathrm{span}(S) = \big\{\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k :\ \alpha_j \in \mathbb{F},\ \vec{v}_j \in S,\ k = 1, 2, \cdots\big\}.$$

不難證明 $\langle S\rangle$ 是 $\mathcal{V}$ 中包含集合 S 最小的一個子空間。

E. 向量空間 $\mathcal{V}$ 中的一個線性獨立且生成 $\mathcal{V}$ 的部分集合, 稱爲 $\mathcal{V}$ 的基底。向量空間 $\mathcal{V}$ 的基底的基數 (cardinality) 稱爲 $\mathcal{V}$ 的維數 (dimension), 記作 $\dim(\mathcal{V})$。當基底爲有限集合時, 這就是基底中元素的個數。

這樣定義的基底是否存在? 這樣定義的維數是否合理? 我們有下面的命題。

命題 2.1.1: 除了零空間 $\{0\}$ 之外, 任意向量空間一定存在一組基底。

證明: 設 $\mathcal{V}$ 是非零向量空間, $\mathcal{V}$ 中線性獨立的部分集合的全體記作 $\mathcal{A}$。任取一個非零向量 $\vec{v} \in \mathcal{V}$, 令 $S = \{\vec{v}\}$, 則 S 是 $\mathcal{V}$ 中的一個線性獨立的部分集合, 故 $\mathcal{A} \neq \emptyset$。在 $\mathcal{A}$ 中可按

集合的包含關係 "$\subset$" 定義一個偏序 (partially order), 若 $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ 是 $\mathcal{V}$ 中線性獨立部分集合的一條鏈, 則

$$U = \cup_j I_j$$

仍為 $\mathcal{V}$ 中一個線性獨立的部分集合, 故任一條鏈必有上界。因此, 由 Zorn 引理 (Zorn引理: 若 P 為一個偏序集合 (partially ordered set), 每個鏈都有上界, 則 P 有極大元素), 我們知道 $\mathcal{A}$ 必有極大元素, 即 $\mathcal{V}$ 有極大線性獨立的部分集合 $\mathcal{B}$, 也就是說 $\mathcal{B}$ 是線性獨立的, 但任意眞包含 $\mathcal{B}$ 的部分集合一定不是線性獨立的, 於是 $\mathcal{B}$ 生成 $\mathcal{V}$, 若不然, 必存在向量 $\vec{u} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{B}$, 它不是 $\mathcal{B}$ 中的向量的線性組合, 於是 $\mathcal{B} \cup \{\vec{u}\}$ 是一個眞包含 $\mathcal{B}$ 的線性獨立的部分集合, 因而得到矛盾。這便證明了向量空間基底的存在性。

命題2.1.2: 當向量空間的基底為有限集合時, 這樣定義的維數是合理的。

證明: 我們先來證明如下的結果。若 $\mathcal{V}$ 是一向量空間, 向量 $\vec{v}_1\ \ldots,\ \vec{v}_n$ 是線性獨立的, 而向量 $\vec{w}_1\ \ldots,\ \vec{w}_m$ 生成 $\mathcal{V}$, 因此推出 $n \le m$。先列出這兩個集合:

$$\big\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\big\}; \qquad \big\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\big\}.$$

將後面的向量 $\vec{v}_n$ 移到前一個集合, 成為

$$\big\{\vec{v}_n,\ \vec{w}_1\ \ldots,\ \vec{w}_m\big\}; \qquad \big\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}\big\}.$$

由於 $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ 生成 $\mathcal{V}$, 故 $\vec{v}_n$ 可以寫成 $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ 的線性組合, 故可以從 $\vec{w}_j$, $j = 1, \ldots, m$ 中移走其中的一個, 我們不妨假設是 $\vec{w}_1$, 這樣, $\vec{v}_n$, $\vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m$ 仍然能生成 $\mathcal{V}$; 因而得到新的兩個集合:

$$\big\{\vec{v}_n,\ \vec{w}_2\ \ldots,\ \vec{w}_m\big\}; \qquad \big\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}\big\}.$$

我們繼續將後面的向量 $\vec{v}_{n-1}$ 移到前一個集合, 成為

$$\big\{\vec{v}_{n-1},\ \vec{v}_n,\ \vec{w}_2\ \ldots,\ \vec{w}_m\big\}; \qquad \big\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-2}\big\}.$$

同樣理由可以從前面的集合中移走其中的一個, 我們不妨假設是 $\vec{w}_2$, 這樣, $\vec{v}_{n-1}$, $\vec{v}_n$, $\vec{w}_3, \ldots, \vec{w}_m$ 仍然能生成 $\mathcal{V}$; 因而得到新的兩個集合:

$$\big\{\vec{v}_{n-1},\ \vec{v}_n,\ \vec{w}_3, \ldots, \vec{w}_m\big\}; \qquad \big\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-2}\big\}.$$

這個步驟可以一直進行下去, 直到所有的 $\vec{v}_j$, $j = 1, \ldots, n$, 或所有的 $\vec{w}_k$, $k = 1, \ldots, m$ 全部移完為止, 這一過程稱為對向量集合 $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$ 進行 Steinitz 替換。若所有的 $\vec{w}_k$,

$k=1,\ldots m$ 首先移完, 即 $m<n$, 則前一個集合只是後一個集合 $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ 的一個眞部分集合, 而這又生成 $\mathcal{V}$, 這與 $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ 是線性獨立相互矛盾, 故必須是 $m\geq n$。由此結果便得到: 若 $\mathcal{V}$ 由有限個向量所生成, 則 $\mathcal{V}$ 的任意兩個基底有相同的基數, 即在此情形下, 維數的定義是合理的, 命題因而證畢。

從上面的討論, 我們雖然只涉及有限維的向量空間, 但在線性代數中, 的確存在無限維的向量空間; 例如 $L^2([0,2\pi])$, 定義在閉區間 $[0,2\pi]$ 上所有平方可積函數所成的集合, 這是一個向量空間。在富氏分析中我們知道 $\{1,\cos(nx),\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 爲 $C([0,2\pi])$ 的一組基底。但在這五次的演講中, 我們只討論有限維的向量空間。

由命題2.1.2, 不難證出若 $\mathcal{V}$ 是一 n 維的向量空間, 則 $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一組基底之充分必要條件爲 $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ 是線性獨立。假設 $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ 線性獨立, 故對任一 $\vec{u}\in\mathcal{V}$, $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n,\vec{u}\}$ 是線性相依, 因爲 $\dim(\mathcal{V})=n$。故存在不全爲零的數 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta\in\mathbb{F}$ 使得

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\vec{v}_j+\beta\vec{u}=\vec{0}$$

我們知 $\beta\neq 0$, 否則 $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\vec{v}_j=\vec{0}$; 但是 $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ 是線性獨立, 因此 $\alpha_j=\vec{0}$, $j=1,\ldots,n$。所以

$$\vec{u}=-\frac{1}{\beta}\big(\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n\big),$$

即 $\langle\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n,\vec{u}\}\rangle=\mathcal{V}$, 因此 $\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ 生成 $\mathcal{V}$。

F. 若 $\mathcal{W}$ 是體 $\mathbb{F}$ 上的向量空間 $\mathcal{V}$ 的子空間, $\vec{u}$, $\vec{v}\in\mathcal{V}$, 若 $\vec{u}-\vec{v}\in\mathcal{W}$, 則稱 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 同餘模 $\mathcal{W}$ (congruent modulo $\mathcal{W}$), 記作

$$\vec{u}\ \cong\ \vec{v},\quad \operatorname{mod}\mathcal{W}.$$

將所有與 $\vec{v}$ 同餘的元素的全體記作 $[\vec{v}]$, 換句話說, $\vec{u}\in[\vec{v}]$ 若且唯若 $\vec{u}\ \cong\ \vec{v}$, $\operatorname{mod}\mathcal{W}$。稱 $[\vec{v}]$ 爲向量空間 $\mathcal{V}$ 中 $\mathcal{W}$ 的一個陪集 (coset)。同餘是一個等價關係, 它將 $\mathcal{V}$ 進行劃分, 而 $[\vec{v}]$ 是塊。若 $\widetilde{\mathcal{V}}=\{\vec{v}\in\mathcal{V}$ 且 $\vec{v}$ 只在唯一的陪集中$\}$ 則陪集的全體可記作

$$\mathcal{V}/\mathcal{W}=\big\{\vec{v}+\mathcal{W}:\ \vec{v}\in\widetilde{\mathcal{V}}\big\}.$$

在 $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ 中定義的加法爲

$$(\vec{v}+\mathcal{W})+(\vec{u}+\mathcal{W})=(\vec{v}+\vec{u})+\mathcal{W},$$

$\mathbb{F}$ 對 $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ 的純量乘積爲

$$\alpha\,(\vec{v}+\mathcal{W})=\alpha\,\vec{v}+\mathcal{W},$$

則 $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ 爲一個向量空間, 稱爲 $\mathcal{V}$ 模 $\mathcal{W}$ 的商空間 (quotient space of $\mathcal{V}$ modulo $\mathcal{W}$)。

由以上這些定義, 可以得到如下命題。

命題2.1.3: 如果 $\mathcal{B}$ 是體 $\mathbb{F}$ 上 n 維向量空間 $\mathcal{V}$ 的部分集合, 則以下敍述是等價的

1. $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一組基底;
2. $\mathcal{V}$ 中的每一個向量 $\vec{v}$ 可唯一的寫爲
$$\vec{v}=\alpha_1\vec{b}_1+\cdots+\alpha_n\vec{b}_n,$$
這裡 $\vec{b}_j\in\mathcal{B}$, $\alpha_j\in\mathbb{F}$, $j=1,\ldots,n$;
3. $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{V}$ 中極小生成集;
4. $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{V}$ 中極大線性獨立集合。

命題2.1.4: 若 $\mathcal{W}_1$ 與 $\mathcal{W}_2$ 爲有限維向量空間 $\mathcal{V}$ 的兩個子空間, 則

$$\dim(\mathcal{W}_1)+\dim(\mathcal{W}_2)=\dim(\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2)+\dim(\mathcal{W}_1\cap\mathcal{W}_2) \tag{2.1.2}$$

若 $\mathcal{V}$ 是體 $\mathbb{F}$ 上 n 維向量空間, $\mathcal{B}=\{\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n\}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一組基底, 則對每個向量 $\vec{v}\in\mathcal{V}$ 存在唯一的一組有限數列 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 使得 $\vec{v}$ 可以寫成

$$\vec{v}=\alpha_1\vec{b}_1+\cdots+\alpha_n\vec{b}_n=\left[\vec{b}_1,\,\cdots,\,\vec{b}_n\right]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}.$$

故對基底 $\mathcal{B}$ 來講, $\vec{v}$ 可以用列向量 $[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]^T$ 表示之, 記作 $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$, 稱爲向量 $\vec{v}$ 在基底 $\mathcal{B}$ 下的座標。如果 $\mathcal{C}=\{\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_n\}$ 也是 $\mathcal{V}$ 的一組基底, 則存在唯一的 $n\times n$ 可逆矩陣 $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}=[\vec{A}_1,\ldots,\vec{A}_n]$, 這裡 $\vec{A}_j$, $j=1,\ldots,n$ 爲 n 個列向量, 使得

$$[\vec{v}]_{\mathcal{C}}=M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}}.$$

若取 $\vec{v}=\vec{b}_j$, 則得到 $\vec{A}_j=[\vec{b}_j]_{\mathcal{C}}$, $j=1,\ldots,n$, 即

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}=\left[[\vec{b}_1]_{\mathcal{C}},\ldots,[\vec{b}_n]_{\mathcal{C}}\right].$$

若 $\mathcal{V}$ 是體 $\mathbb{F}$ 上 n 維向量空間, $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一組基底, 考慮映射

$$\Phi_{\mathcal{B}}:\mathcal{V}\to\mathbb{F}^n,\qquad \Phi_{\mathcal{B}}(\vec{v})=[\vec{v}]_{\mathcal{B}},\quad \forall\,\vec{v}\in\mathcal{V}.$$

我們很容易證明: $\Phi_{\mathcal{B}}$ 是 $\mathcal{V}$ 到 $\mathbb{F}^n$ 的同構映射, 即 $\Phi_{\mathcal{B}}$ 是一線性雙射。因此, $\mathcal{V}$ 與 $\mathbb{F}^n$ 是同構的! 於是我們有如下的定理:

定理 2.1.1:體 $\mathbb{F}$ 上 n 維向量空間 $\mathcal{V}$ 同構於 $\mathbb{F}^n$。體 $\mathbb{F}$ 上兩個向量空間同構若且唯若它們的維數相同。

這個定理告訴我們, 在同構意義下, n 維向量空間只有一個, 即爲大家十分熟悉的 $\mathbb{F}^n$。當 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 時, 這便是我們所熟悉的 n 維歐氏空間。

2.2. 對偶空間

有了線性空間, 即向量空間, 首先要討論的是定義在其上最簡單的一類線性函數, 即線性泛函 (linear functional)。

定義 2.2.1: 若 $\mathcal{V}$ 是體 $\mathbb{F}$ 上 n 維向量空間, 函數

$$f\,:\mathcal{V}\,\rightarrow\,\mathbb{F}$$

滿足

$$f(\alpha\,\vec{u},+\beta\,\vec{v})=\alpha\,f(\vec{u})+\beta\,f(\vec{v}),$$

對任意 α, $\beta\in\mathbb{F}$ 與 $\vec{u}$, $\vec{v}\in\mathcal{V}$ 都成立, 則稱 f 爲 $\mathcal{V}$ 上的線性泛函。

將 $\mathcal{V}$ 上所有線性泛函的全體記作 $\mathcal{V}^*$, 若 f, $g\in\mathcal{V}^*$, 定義加法爲: 對任意 $\vec{u}\in\mathcal{V}$,

$$(f+g)\,(\vec{u})=f(\vec{u})+g(\vec{u}),$$

定義 $\mathbb{F}$ 對 $\mathcal{V}^*$ 的純量乘積爲: 對任意 $\vec{u}\in\mathcal{V}$ 及 $\alpha\in\mathbb{F}$,

$$(\alpha\,f)\,(\vec{u})=\alpha\,f(\vec{u}).$$

顯面易見這樣定義了加法與純量乘積之後, $\mathcal{V}^*$ 也是一個向量空間, 稱爲 $\mathcal{V}$ 的對偶空間 (dual space)。

設 $\mathcal{V}$ 是一個 n 維向量空間, $\mathcal{B}=\{\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n\}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一組基底, 對每一個 $\vec{b}_j$, $j=1,\ldots,n$, 可以定義一個線性泛函 $\vec{b}_j^*\in\mathcal{V}^*$, 使得

$$\vec{b}_j^*\,(\vec{b}_k)=\delta_{jk},\qquad j,k=1,\ldots,n,\tag{2.1.3}$$

這裡 δ_{jk} 是 Kronecker 函數, 即 $\delta_{jj}=1$, $\delta_{jk}=0$, $j\neq k$。不難證明, $\mathcal{B}^*=\{\vec{b}_1^*,\ldots,\vec{b}_n^*\}$ 是 $\mathcal{V}^*$ 的一組基底, 稱 $\mathcal{B}^*$ 爲 $\mathcal{B}$ 的對偶基底 (dual basis)。由此立得

$$\dim(\mathcal{V})=\dim(\mathcal{V}^*).$$

由於 $\mathcal{V}^*$ 也是向量空間, 故 $\mathcal{V}^*$ 有對偶空間 $\mathcal{V}^{**}=(\mathcal{V}^*)^*$, 若 $\mathcal{V}$ 是有限維向量空間, 則

$$\dim(\mathcal{V}^{**})=\dim(\mathcal{V}^*)=\dim(\mathcal{V}).$$

因此由定理2.1.1知: 對有限維向量空間 $\mathcal{V}$, 有 $\mathcal{V} \approx \mathcal{V}^*$。

若

$$T_1 \,:\, \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{b}_j \,\rightarrow\, \vec{v}^* = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{b}_j^* \in \mathcal{V}^*.$$

由於 $\dim(\mathcal{V}^*) = \dim(\mathcal{V})$ 及定理2.1.1, 我們知道 T_1 是一個同構映射, 且 $\mathcal{V} \approx \mathcal{V}^*$。對任意 $\vec{y} = \sum_{k=1}^{n} y_k \vec{b}_k \in \mathcal{V}$, 由(2.1.3),

$$\vec{x}^*(\vec{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{b}_j^*(\vec{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{b}_j^* \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k \vec{b}_k \Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

同樣對每個 $\vec{b}_j^*$, $j = 1, \ldots, n$, 可以定義一個線性泛函 $\vec{b}_j^{**} \in \mathcal{V}^{**}$, 使得

$$\vec{b}_j^{**}\,(\vec{b}_k^*) = \delta_{jk}, \qquad j, k = 1, \ldots, n,$$

這裡 δ_{jk} 是 Kronecker 函數。不難證明, $\mathcal{B}^{**} = \{\vec{b}_1^{**}, \ldots, \vec{b}_n^{**}\}$ 是 $\mathcal{V}^{**}$ 的一組基底, 爲 $\mathcal{B}^*$ 的對偶基底。若

$$T_2 \,:\, \vec{x}^* = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{b}_j^* \,\rightarrow\, \vec{v}^{**} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{b}_j^{**} \in \mathcal{V}^{**},$$

與上面同樣理由, T_2 是一個同構映射, 且 $\mathcal{V}^* \approx \mathcal{V}^{**}$。對任意 $\vec{z} = \sum_{l=1}^{n} z_l \vec{b}_l \in \mathcal{V}^*$, 由(2.1.3)知,

$$\vec{z}(\vec{b}_k) = \sum_{l=1}^{n} z_l \vec{b}_l^*(\vec{b}_k) = z_k.$$

故 $\vec{z} = \sum_{k=1}^{n} \vec{z}(\vec{b}_k) \vec{b}_k^*$。於是

$$\begin{aligned}
\vec{x}^{**}(\vec{z}) &= \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{b}_j^{**}(\vec{z}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{b}_j^{**} \Big(\sum_{k=1}^{n} \vec{z}(\vec{b}_k) \vec{b}_k^* \Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{z}(\vec{b}_j) \\
&= \vec{w} \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k \vec{b}_k \Big) = \vec{z}(\vec{x}).
\end{aligned}$$

令 $T = T_2 \circ T_1$, 則 $T \,:\, \mathcal{V} \,\rightarrow\, \mathcal{V}^{**}$ 是一個同構映射, 且 $T(\vec{x}) = T_2\,(T_1(\vec{x})) = T_2(\vec{x}^*) = \vec{x}^{**}$ 對每個 $\vec{x}\ \mathcal{V}$ 都成立。已證 $\vec{x}^{**}(\vec{z}) = \vec{z}(\vec{x})$ 對每個 $\vec{z}\ \mathcal{V}^*$ 都成立。由上述兩式可見, $\vec{x}$ 在 $\mathcal{V}$ 的同構映射 T 下的像不依賴於 $\mathcal{V}$ 中基底的選取。稱這樣的同構映射爲自然同構映射。在這樣的自然同構映射下, 可以把 $\vec{x}$ 與 $T(\vec{x}) = \vec{x}^{**}$ 等同。從而把 $\mathcal{V}$ 與 $\mathcal{V}^*$ 互爲對偶空間。這就是把 $\mathcal{V}^*$ 稱爲 $\mathcal{V}$ 的對偶空間的原因。讀者可參閱命題2.2.4、命題3.2.2及命題3.2.3的 (2) 與 (3)。

一個十分重要的線性泛函是零化子。

定義 2.2.2: 若 M 是向量空間 $\mathcal{V}$ 的非空部分集合, 在 $\mathcal{V}^*$ 中的集合

$$M^\circ = \left\{ f \in \mathcal{V}^* : \ \ f(M) = 0 \right\}$$

稱爲 M 的零化子 (annihilator), 這裡 $f(M) = \{f(\vec{v}) : \ \vec{v} \in M\}$。

關於零化子有如下一些結論。

命題 2.2.1: M° 是 $\mathcal{V}^*$ 的子空間, 即使 M 不是 $\mathcal{V}$ 的子空間。

命題 2.2.2: 當 M 是 n 維向量空間的子空間, 則

$$\dim(M) + \dim(M^\circ) = n.$$

證明: 若 $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ 是 M 的一組基底, 將 $\mathcal{U}$ 擴充爲

$$\mathcal{B} = \left\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-k}\right\},$$

使 $\mathcal{B}$ 成爲 $\mathcal{V}$ 的一組基底, 則

$$\mathcal{B}^* = \left\{\vec{u}_1^*, \ldots, \vec{u}_k^*, \vec{v}_1^*, \ldots, \vec{v}_{n-k}^*\right\},$$

是 $\mathcal{B}$ 的對偶基底。我們現在來證 $\{\vec{v}_1^*, \ldots, \vec{v}_{n-k}^*\}$ 是 M° 的一組基底。顯然它們是線性獨立的; 現在只要證它們生成 M°。若 $f \in M^\circ$, 則 $f \in \mathcal{V}^*$, 故 f 可以寫成

$$f = \alpha_1 \vec{u}_1^* + \cdots + \alpha_k \vec{u}_k^* + \beta_1 \vec{v}_1^* \ + \cdots + \beta_{n-k} \vec{v}_{n-k}^*,$$

這裡 $\alpha_j \in \mathbb{F}$, $j = 1, \ldots, k$, $\beta_j \in \mathbb{F}$, $j = 1, \ldots, n-k$。由於 $f \in M^\circ$, 則 $f(\vec{u}_j) = 0$, 但 $f(\vec{u}_j) = \alpha_j$, 故 $\alpha_j = 0$, $j = 1, \ldots, k$。因此,

$$f = \beta_1 \vec{v}_1^* \ + \cdots + \beta_{n-k} \vec{v}_{n-k}^*.$$

於是 $\{\vec{v}_1^*, \ldots, \vec{v}_{n-k}^*\}$ 生成 M°; 因此命題得證。

命題 2.2.3: 若 M, N 是向量空間 $\mathcal{V}$ 的部分集合, 且 $M \subset N$, 則

$$N^\circ \subset M^\circ.$$

命題 2.2.4: 若 $\mathcal{V}$ 是有限維向量空間, 如視 $\mathcal{V}^{**}$ 與 $\mathcal{V}$ 等同, 則對 $\mathcal{V}$ 的任一部分集合 M, 都有

$$M^{\circ\circ} = \operatorname{span}(M).$$

若 $\mathcal{W}$ 爲 $\mathcal{V}$ 的子空間, 則 $\mathcal{W}^{\circ\circ}=\mathcal{W}$。

命題2.2.5:若 $\mathcal{W}_1$ 與 $\mathcal{W}_2$ 是有限維向量空間 $\mathcal{V}$ 的子空間, 則

$$\big(\mathcal{W}_1\cap\mathcal{W}_2\big)^\circ=\mathcal{W}_1^\circ+\mathcal{W}_2^\circ,$$

及

$$\big(\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2\big)^\circ=\mathcal{W}_1^\circ\cap\mathcal{W}_2^\circ.$$

命題2.2.6: 若向量空間 $\mathcal{V}$ 是它的兩個子空間 $\mathcal{W}_1$ 與 $\mathcal{W}_2$ 的直和, 即 $\mathcal{V}=\mathcal{W}_1\oplus\mathcal{W}_2$, 則

(1) $\mathcal{W}_1^*\approx\mathcal{W}_2^\circ$ 及 $\mathcal{W}_2^*\approx\mathcal{W}_1^\circ$;

(2) $\big(\mathcal{W}_1\oplus\mathcal{W}_2\big)^*=\mathcal{W}_1^\circ\oplus\mathcal{W}_2^\circ$。

證明: 我們先證 (1): 若 $f\in\mathcal{W}_2^\circ\subset\mathcal{V}^*$, 則 $f(\mathcal{W}_2)=0$。定義映射

$$T\,:\,f\,\rightarrow\,f\Big|_{\mathcal{W}_1},$$

即將 $f\in\mathcal{W}_2^\circ$ 視爲 f 在 $\mathcal{W}_1$ 上的限制, 顯然, $f\Big|_{\mathcal{W}_1}\in\mathcal{W}_1^*$, 故這是 $\mathcal{W}_2^\circ$ 到 $\mathcal{W}_1^*$ 的映射, 易見這是線性的。若 $f\Big|_{\mathcal{W}_1}=0$, 則因 $f(\mathcal{W}_2)=0$, 這便導出 $f=0$。故映射 T 是一對一。若 $g\in\mathcal{W}_1^*$, 定義 f 爲

$$f(\vec{w}_1+\vec{w}_2)=g(\vec{w}_1),$$

這裡 $\vec{w}_1\in\mathcal{W}_1$, $\vec{w}_2\in\mathcal{W}_2$, 顯然 $f\in\mathcal{V}^*$。由於

$$f(\vec{0}+\vec{w}_2)=g(\vec{0})=0,$$

對所有 $\vec{w}_2\in\mathcal{W}_2$ 都成立, 故 $f\in\mathcal{W}_2^\circ$。而 $f\Big|_{\mathcal{W}_1}=g$, 故任給 $g\in\mathcal{W}_1^*$, 就有 $f\in\mathcal{W}_2^\circ\subset\mathcal{V}^*$, 使得 $f\Big|_{\mathcal{W}_1}=g$, 故 T 爲滿射。因此, $\mathcal{W}_2^\circ\approx\mathcal{W}_1^*$, $\mathcal{W}_2^\circ\approx\mathcal{W}_1^*$; 同樣可證, $\mathcal{W}_2^*\approx\mathcal{W}_1^\circ$。繼續來證明 (2): 若 $f\in\mathcal{W}_1^\circ\cap\mathcal{W}_2^\circ$, 則 $f(\mathcal{W}_1)=0$ 及 $f(\mathcal{W}_2)=0$, 故 $f=0$, 即 $\mathcal{W}_1^\circ\cap\mathcal{W}_2^\circ=\{0\}$。而 $\mathcal{W}_1^\circ$ 與 $\mathcal{W}_2^\circ=\{0\}$ 是 $\mathcal{V}^*$ 的子空間, 故

$$\mathcal{W}_1^\circ\oplus\mathcal{W}_2^\circ\subset\big(\mathcal{W}_1\oplus\mathcal{W}_2\big)^*.$$

若 $f\in(\mathcal{W}_1\oplus\mathcal{W}_2)^*$, 定義

$$g(\vec{w}_1+\vec{w}_2)=f(\vec{w}_2),\qquad h(\vec{w}_1+\vec{w}_2)=f(\vec{w}_1),$$

這裡 $\vec{w}_1 \in \mathcal{W}_1$, $\vec{w}_2 \in \mathcal{W}_2$, 顯然 $g, h \in (\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2)^*$。由於 $g(\mathcal{W}_1) = 0$ 及 $h(\mathcal{W}_2) = 0$, 故 $g \in \mathcal{W}_1^\circ$ 及 $h \in \mathcal{W}_2^\circ$。而

$$f(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = f(\vec{w}_1) + f(\vec{w}_2) = g(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) + h(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = (g+h)(\vec{w}_1 + \vec{w}_2).$$

因此, $f = g + h \in \mathcal{W}_1^\circ \oplus \mathcal{W}_2)^\circ$, 於是

$$\big(\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2\big)^* \subset \mathcal{W}_1^\circ \oplus \mathcal{W}_2^\circ.$$

這便得到 (2), 命題因此證畢。

2.3. 雙線性型式

在上一節中, 討論了向量空間上最簡單的一類線性函數, 即線性泛函, 對有限維向量空間, 我們證明了它的對偶空間同構於它自己。還定義討論了對偶空間中一類重要的子空間, 零化子空間, 這在以後十分有用。

a. 討論了線性函數, 順理成章的是討論向量空間上雙線性型式及二次型式。在這一節中, 討論的向量空間全是有限維的。

定義 2.3.1: 若 $\mathcal{V}$ 是體 $\mathbb{F}$ 上的向量空間, 映射

$$\langle , \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{F}$$

稱爲雙線性型式 (bilinear form), 若對每個坐標而言都是線性函數, 即對任意 $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in \mathcal{V}$ 及 α, $\beta \in \mathbb{F}$, 有

$$\langle \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \beta \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$$

及

$$\langle \vec{z}, \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{z}, \vec{x} \rangle + \beta \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle.$$

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$, $\vec{x} \in \mathcal{V}$ 稱爲 $\mathcal{V}$ 上的二次型式 (quadratic form)。

如果對任意 $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathcal{V}$, 有

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle,$$

則稱 $\langle , \rangle$ 爲對稱 (symmetric) 雙線性型式。如果對任意 $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathcal{V}$, 有

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle,$$

則稱 $\langle , \rangle$ 爲斜對稱 (skew-symmetric) 雙線性型式。

命題 2.3.1: 設體 $\mathbb{F}$ 的特徵不等於 2, $\langle , \rangle$ 是斜對稱的雙線性型式若且唯若: 對任意的 $\vec{z} \in \mathcal{V}$, 我們有 $\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = 0$。

證明: 若對任意的 $\vec{z} \in \mathcal{V}$, 有 $\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = 0$, 則任取 $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathcal{V}$, 則

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle \\ &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \\ &= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle, \end{aligned}$$

即 $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$, 故 $\langle , \rangle$ 爲斜對稱。這部分對任一特徵均正確。若 $\langle , \rangle$ 爲斜對稱, 則對任意的 $\vec{x} \in \mathcal{V}$, 有 $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = -\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$, 即 $2\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$, 由於 $\mathbb{F}$ 的特徵不等於 2, 從而 $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$; 命題證畢。

b. 在向量空間 $\mathcal{V}$ 上, 如果定義了雙線性型式 $\langle , \rangle$, 則稱 $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$ 爲度量向量空間 (metric vector space), 有時就寫成 $\mathcal{V}$。而取定的雙線性型式 $\langle , \rangle$ 稱爲度量向量空間的度量。一個度量向量空間稱爲非奇異 (non-singular), 若對任意的 $\vec{v} \in \mathcal{V}$, $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0$ 可以導出 $\vec{x} = \vec{0}$。若 $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$ 是非奇異度量向量空間, 且 $\langle , \rangle$ 是對稱的, 則稱 $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$ 爲體 $\mathbb{F}$ 上的對稱度量向量空間, 也稱 $\mathcal{V}$ 是體 $\mathbb{F}$ 上的正交幾何 (orthogonal geometry)。若 $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$ 爲體 $\mathbb{F}$ 上的斜對稱度量向量空間, 也稱 $\mathcal{V}$ 是體 $\mathbb{F}$ 上的辛幾何 (sympletic geometry)。此處我們只討論正交幾何和辛幾何。先來證明重要的秩和零度定理。

若 $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ 爲兩個向量空間, 令 $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ 爲由 $\mathcal{V}$ 到 $\mathcal{W}$ 的線性變換所成之集合。假設 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, 則有 $\ker(T) = \{\vec{v} \in \mathcal{V} : T(\vec{v}) = \vec{0}\}$ 與 $\mathrm{Im}(T) = \{T(\vec{v}),\ \vec{v} \in \mathcal{V}\}$ 兩個子空間, 我們稱 $\dim(\ker(T))$ 爲 T 的零度 (nullity), 記作 $\mathrm{null}(T)$; 稱 $\dim(\mathrm{Im}(T))$ 爲 T 的秩 (rank), 記作 $\mathrm{rank}(T)$。

定理 2.3.1 (秩與零度定理): 若 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, 則有

$$\mathrm{rank}(T) + \mathrm{null}(T) = \dim(\mathcal{V}).$$

證明: 由於 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, 故 $\ker(T)$ 是 $\mathcal{V}$ 的一個子空間, 於是有補空間 $\ker(T)^c$, 即

$$\ker(T) \oplus \ker(T)^c = \mathcal{V}.$$

設 $\mathcal{K}$ 是 $\ker(T)$ 的基底, $\mathcal{C}$ 是 $\ker(T)^c$ 的基底。由於 $\mathcal{K} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ 及 $\mathcal{K} \cup \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{V}$ 的基底, 故

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\ker(T)^c) = \dim(\mathcal{V}).$$

將 T 限制在 $\ker(T)^c$ 上, 記作 T^c, 則易證

$$T^c : \ker(T)^c \to \mathrm{Im}(T)$$

是同構。我們先證 T^c 爲單射。若 $\vec{v} \in \ker(T)^c$, 且 $T^c(\vec{v}) = \vec{0}$, 由於 T^c 是 T 在 $\ker(T)^c$ 上的限制, 故 $T(\vec{v}) = \vec{0}$。於是 $\vec{v} \in \ker(T)^c \cap \ker(T)$, 從而 $\vec{v} = \vec{0}$。我們再證 T^c 爲滿射。若 $T(\vec{v}) \in \mathrm{Im}(T)$, 則 $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, 這裡 $\vec{u} \in \ker(T)$, $\vec{w} \in \ker(T)^c$。於是

$$T(\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{w}) = T(\vec{w}) = T^c(\vec{w}),$$

從而 $T(\vec{v}) \in \mathrm{Im}(T^c)$, 即 $\mathrm{Im}(T) \subset \mathrm{Im}(T^c)$; 而 $\mathrm{Im}(T^c) \subset \mathrm{Im}(T)$ 是顯而易見的, 故 $\mathrm{Im}(T^c) = \mathrm{Im}(T)$。因此 T^c 是將 $\ker(T)^c$ 映到 $\mathrm{Im}(T)$ 上的滿射, 而 T^c 顯然是線性的, 故 T^c 是 $\ker(T)^c$ 到 $\mathrm{Im}(T)$ 的同構映射, 即

$$\ker(T)^c \approx \mathrm{Im}(T).$$

定理因而證畢。

由定理2.3.1 可得到一系列重要推論。

推論 2.3.1: 若 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, 且 $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{W}) < \infty$, 則 T 爲單射若且唯若 T 爲滿射。

推論 2.3.2 (第一同構定理): 若 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, $\mathcal{V}/\ker(T)$ 是 $\mathcal{V}$ 模 $\ker(T)$ 的商空間, 則

$$\mathcal{V}/\ker(T) \approx \mathrm{Im}(T).$$

證明: 定義映射 $T' : \mathcal{V}/\ker(T) \to \mathcal{W}$ 爲

$$T'(\vec{v} + \ker(T)) = T(\vec{v}).$$

先來證這樣定義的 T' 是有意義的, 這就要證明: 若 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, 且 $\vec{u} + \ker(T) = \vec{v} + \ker(T)$, 則 $T'(\vec{u} + \ker(T)) = T'(\vec{v} + \ker(T))$。這也就是要證明: 若 $\vec{u} + \ker(T) = \vec{v} + \ker(T)$, 則 $T(\vec{u}) = T(\vec{v})$。換句話說, 我們要證明: $\vec{v} - \vec{u} \in \ker(T)$, 則 $T(\vec{v} - \vec{u}) = \vec{0}$。這是當然成立的, 故這樣定義的 T' 是有意義的, 且 T' 是單射。顯然 $T' : \mathcal{V}/\ker(T) \to \mathcal{W}$ 是一個線性變換, 由定理2.3.1及 T' 是單射, 我們知道

$$\dim(\mathrm{Im}(T')) = \dim\big(\mathcal{V}/\ker(T)\big),$$

但

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(T')) &= \big\{T'(\vec{v} + \ker(T)) : \vec{v} + \ker(T) \in \mathcal{V}/\ker(T)\big\}\\ &= \big\{T(\vec{v}) : \vec{v} \in \mathcal{V}\big\} = \mathrm{Im}(T),\end{aligned}$$

故 T' 是滿射, 所以

$$\mathcal{V}/\ker(T) \approx \mathrm{Im}(T).$$

推論證畢。

推論 2.3.3: 若 $\mathcal{W}$ 是向量空間 $\mathcal{V}$ 的一個子空間, $\mathcal{W}^c$ 是 $\mathcal{W}$ 的補空間, 則

$$\mathcal{V}/\mathcal{W} \approx \mathcal{W}^c,$$

且

$$\dim(\mathcal{W}) + \dim(\mathcal{W}^c) = \dim(\mathcal{V}).$$

證明: $\mathcal{V}$ 中任一向量 $\vec{v}$ 可以唯一地寫成 $\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}^c$, 這裡 $\vec{w} \in \mathcal{W}$ 及 $\vec{w}^c \in \mathcal{W}^c$。定義線性算子 $\tilde{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ 爲

$$\tilde{T}(\vec{w} + \vec{w}^c) = \vec{w}^c,$$

這樣定義的 $\tilde{T}$ 是有意義的, 顯然 $\mathrm{Im}(\tilde{T}) = \mathcal{W}^c$ 及

$$\ker(\tilde{T}) = \left\{\vec{w} + \vec{w}^c \in \mathcal{V} :\ \vec{w}^c = \vec{0}\right\} = \mathcal{W}.$$

故由第一同構定理, 得 $\mathcal{V}/\mathcal{W} \approx \mathcal{W}^c$。由定理2.3.1, 得

$$\dim(\mathcal{W}) + \dim(\mathcal{W}^c) = \dim(\mathcal{V}).$$

推論證畢。

由第一同構定理還可以導出如下推論。

推論 2.3.4 (第二同構定理): 若 $\mathcal{V}$ 是一個向量空間, $\mathcal{W}_1$ 及 $\mathcal{W}_2$ 爲 $\mathcal{V}$ 的二個子空間, 則

$$\frac{\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2}{\mathcal{W}_2} \approx \frac{\mathcal{W}_1}{\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2}.$$

推論 2.3.5: (第三同構定理): 若 $\mathcal{V}$ 是一個向量空間, $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2 \subset \mathcal{V}$ 爲 $\mathcal{V}$ 的子空間, 則

$$\frac{\mathcal{V}\,/\,\mathcal{W}_1}{\mathcal{W}_2\,/\,\mathcal{W}_1} \approx \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{W}_2}.$$

推論2.3.4與推論2.3.5的證明從略。我們就留給有興趣的讀者作爲練習。

在非奇異的度量空間上, 上一節所討論的線性泛函, 都可以用雙線性形式來表示。

定理 2.3.2 (Riesz 表示定理): 若 $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$ 是有限非奇異的度量空間, 任取 $f \in \mathcal{V}^*$, 則一定存在唯一的向量 $\vec{v} \in \mathcal{V}$, 使得

$$f(\vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle,$$

對所有的 $\vec{u} \in \mathcal{V}$ 都成立。

證明: 若 $\vec{v} \in \mathcal{V}$, 定義映射 $\Phi_{\vec{v}} : \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ 如下

$$\Phi_{\vec{v}}(\vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

顯易而證 $\Phi_{\vec{v}} \in \mathcal{V}^*$, 故可定義函數 $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ 爲

$$T(\vec{v}) = \Phi_{\vec{v}}.$$

顯然, 這是線性的, 由於 $\mathcal{V}$ 是非奇異的, 故其核

$$\left\{\vec{v} \in \mathcal{V} : \ \Phi_{\vec{v}} = \vec{0}\right\} = \left\{\vec{v} \in \mathcal{V} : \ \forall\, \vec{u} \in \mathcal{V}, \ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0\right\}$$

是 $\mathcal{V}$ 的只含有零向量的部分集合, 故 T 是單射。T 可以在整個 $\mathcal{V}$ 上定義, 且爲單射, 而已知 $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}^*)$, 故由推論 2.3.1, T 在 $\mathcal{V}$ 上是滿射。因此, T 是一個同構映射, 將 $\mathcal{V}$ 映到 $\mathcal{V}^*$, 即 $\mathcal{V}$ 的任一個線性泛函都可以表示爲 $\Phi_{\vec{v}}$ 之型式, 這裡 $\vec{v} \in \mathcal{V}$, 定理因而證畢。

Riesz 表示定理告訴我們, 在有限維非奇異的度量空間, 其上的線性泛函只有一類, 那就是定義度量向量空間的雙線性型式。

c. 若 $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$ 是 n 維度量向量空間, $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一組基底, 於是, $\langle , \rangle$ 完全可以由 $n \times n$ 矩陣

$$M_{\mathcal{B}} = \left[a_{jk}\right] = \left[\langle \vec{b}_j, \vec{b}_k \rangle\right]$$

來決定, $M_{\mathcal{B}}$ 稱爲雙線性型式在基底 $\mathcal{B}$ 下的矩陣表示。

若 $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathcal{V}$, 且

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{b}_j, \qquad \vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{b}_j,$$

則

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j y_k \langle \vec{b}_j, \vec{b}_k \rangle = \left[\vec{x}\right]_{\mathcal{B}}^{T} M_{\mathcal{B}} \left[\vec{y}\right]_{\mathcal{B}}.$$

這裡 $\left[\vec{x}\right]_{\mathcal{B}}^{T}$, $\left[\vec{y}\right]_{\mathcal{B}}$ 表示在基底 $\mathcal{B}$ 下的坐標, 即

$$\left[\vec{x}\right]_{\mathcal{B}}^{T} = \left[x_1, \ldots, x_n\right]^{T}, \qquad \left[\vec{y}\right]_{\mathcal{B}}^{T} = \left[y_1, \ldots, y_n\right]^{T}.$$

$\langle , \rangle$ 是對稱的若且唯若 $M_{\mathcal{B}}$ 是對稱矩陣, 即

$$a_{jk} = a_{kj}, \qquad j,\, k = 1, \ldots, n.$$

$\langle,\rangle$ 是斜對稱的若且唯若 $M_{\mathcal{B}}$ 是斜對稱的, 即

$$a_{jj}=0,\quad a_{jk}=-a_{kj},\qquad j,\,k=1,\ldots,n,\;\; j\neq k.$$

若 $\mathcal{C}=\{\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_n\}$ 是 $\mathcal{V}$ 的另一組基底, 則由2.1節的最後知, 對任意 $\vec{v}\in\mathcal{V}$, 有

$$\big[\vec{v}\big]_{\mathcal{C}}=M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\,\big[\vec{v}\big]_{\mathcal{B}}$$

及

$$\big[\vec{v}\big]_{\mathcal{B}}=M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,\big[\vec{v}\big]_{\mathcal{C}}$$

於是

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\big[\vec{x}\big]_{\mathcal{B}}^{T}M_{\mathcal{B}}^{T}\,\big[\vec{y}\big]_{\mathcal{B}}^{T}=\big[\vec{x}\big]_{\mathcal{C}}^{T}M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}^{T}\,M_{\mathcal{B}}\,M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\,\big[\vec{y}\big]_{\mathcal{C}}=\big[\vec{x}\big]_{\mathcal{C}}^{T}M_{\mathcal{C}}\,\big[\vec{y}\big]_{\mathcal{C}}.$$

這就得到

$$M_{\mathcal{C}}=M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}^{T}\,M_{\mathcal{B}}\,M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}.$$

也就是說 $M_{\mathcal{C}}$ 與 $M_{\mathcal{B}}$ 是相合的。

$d.$ 要弄清楚對稱的、斜對稱的雙線性型式一共有多少, 也就是在相合的意義下雙線性型式的矩陣有多少標準型式, 這是線性代數最基本問題之一, 我們先要先引入正交的概念。

向量 $\vec{x}$ 與向量 $\vec{y}$ 稱爲正交的(orthogonal), 記作 $\vec{x}\perp\vec{y}$, 若 $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=0$。對於對稱雙線性型式及斜對稱雙線型式, 顯然有 $\vec{x}\perp\vec{y}$ 若且唯若 $\vec{y}\perp\vec{x}$。

若 $\mathcal{X}$ 與 $\mathcal{Y}$ 是度量向量空間 $(\mathcal{V},\langle,\rangle)$ 的兩個子空間, 我們稱它們是正交的, 記作 $\mathcal{X}\perp\mathcal{Y}$, 若對所有 $\vec{x}\in\mathcal{X}$ 與 $\vec{y}\in\mathcal{Y}$, 都有 $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=0$。

集合 $\{\vec{v}\in\mathcal{V}:\ \vec{v}\perp S\}$ 稱爲 S 的正交餘集 (orthogonal complement), 記作 $S^{\perp}$。若 $(\mathcal{V},\langle,\rangle)$ 是度量向量空間, $\mathcal{X}$ 與 $\mathcal{Y}$ 是它的子空間, 並且

$$\mathcal{V}=\mathcal{X}\oplus\mathcal{Y},\qquad \mathcal{X}\perp\mathcal{Y},$$

則稱 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{X}$ 與 $\mathcal{Y}$ 的 正交直和 (orthogonal direct sum), 記作 $\mathcal{X}\oplus_{\perp}\mathcal{Y}$。

定理2.3.3: 若 $(\mathcal{V},\langle,\rangle)$ 是非奇異的度量空間, $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{V}$ 的子空間, 則

$$\mathcal{V}=\mathcal{W}\oplus\mathcal{W}^{\perp}$$

若且唯若 $\mathcal{W}$ 是非奇異的。

爲了要證明定理2.3.3, 我們先來證明下面的引理。

引理2.3.1: 若 $\mathcal{W}$ 是非奇異的度量向量空間 $(\mathcal{V},\langle,\rangle)$ 的一個子空間, 則

$$\dim(\mathcal{W})+\dim(\mathcal{W}^{\perp})=\dim(\mathcal{V}).\tag{2.3.1}$$

證明: 對每個 $\vec{v} \in \mathcal{V}$, 在 $\mathcal{W}$ 上定義線性泛函 $\Phi_{\vec{v}} : \mathcal{W} \to \mathbb{F}$ 如下:

$$\Phi_{\vec{v}}(\vec{w}) = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle,$$

這裡 $\vec{w} \in \mathcal{W}$, 顯然 $\Phi_{\vec{v}} \in \mathcal{W}^*$, 定義映射 $T : \mathcal{V} \to \mathcal{W}^*$ 爲

$$T(\vec{v}) = \Phi_{\vec{v}}(\vec{w}),$$

顯然這是一個線性映射, 且

$$\ker(T) = \left\{ \vec{v} \in \mathcal{V} : \ \Phi_{\vec{v}} = 0 \right\} = \left\{ \vec{v} \in \mathcal{V} : \ \forall\ \vec{w} \in \mathcal{W}, \ \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0 \right\} = \mathcal{W}^{\perp}. \tag{2.3.2}$$

此外, 由定理2.3.2, $\mathcal{W}^*$ 中任一線性泛函均可用 $\mathcal{W}$ 上的雙線性型式來表示之, 故

$$T\big|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$$

是滿射, 從而 $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{W}^*$. 由定理2.3.1知

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathcal{V}).$$

而 $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathcal{W}^*) = \dim(\mathcal{W})$, 由 (2.3.2) 知 $\ker(T) = \mathcal{W}^{\perp}$, 故引理得證。

我們現在用引理2.3.1來完成定理2.3.3之證明。由 (2.1.2)及引理 2.3.1 知道

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{W} + \mathcal{W}^{\perp}) &= \dim(\mathcal{W}) + \dim(\mathcal{W}^{\perp}) - \dim(\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{\perp}) \\ &= \dim(\mathcal{V}) - \dim(\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{\perp}). \end{aligned}$$

若 $\mathcal{W}$ 是非奇異的, 則 $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{\perp} = \{\vec{0}\}$, 因此 $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^{\perp}$, 這就證明了 $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus_{\perp} \mathcal{W}^{\perp}$。反之, 若 $\mathcal{W}$ 不是非奇異的, 則 $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus_{\perp} \mathcal{W}^{\perp}$ 不成立。

e. 有了這些準備, 就可以討論正交幾何和辛幾何的正交分解, 也就是要定出正交幾何和辛幾何的標準型式, 先來討論辛幾何。

若 $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$ 爲辛幾何, 由於 $\langle , \rangle$ 是斜對稱的, 故對每個 $\vec{x} \in \mathcal{V}$ 都有 $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$。取一個非零向量 $\vec{x} \in \mathcal{V}$, 由於 $\mathcal{V}$ 是非奇異的, 故一定存在一個 $\vec{y} \in \mathcal{V}$ 使得 $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \neq 0$。考慮以 $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ 爲一組基底的二維空間 $\mathcal{H}$, 則

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0.$$

而 $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \neq 0$, 以 $\alpha^{-1}\vec{y}$ 來代替 $\vec{y}$, 就有

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 1, \qquad \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = -1.$$

於是在 $\mathcal{H}$ 的基底 $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ 下, $\langle , \rangle$ 的矩陣為

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

由於 $\mathcal{V}$ 非奇異, 故由定理2.3.3, 可將 $\mathcal{V}$ 進行正交分解:

$$\mathcal{V} = \mathcal{H} \oplus_\perp \mathcal{H}^\perp$$

而 $\mathcal{H}^\perp$ 仍是一個非奇異的斜對稱度量向量空間, 所以我們仍可對 $\mathcal{H}^\perp$ 進行這樣的正交分解。重複這樣的步驟, 由於 $\mathcal{V}$ 是有限維, 故 $\mathcal{V}$ 最終可正交分解為

$$\mathcal{V} = \mathcal{H}_1 \oplus_\perp \mathcal{H}_2 \oplus_\perp \cdots \oplus_\perp \mathcal{H}_k.$$

歸納起來, 我們可得如下之結論:

定理2.3.4: 若 $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$ 為非奇異的斜對稱度量向量空間, 則存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $\mathcal{V}$ 可正交分解為

$$\mathcal{V} = \mathcal{H}_1 \oplus_\perp \mathcal{H}_2 \oplus_\perp \cdots \oplus_\perp \mathcal{H}_k.$$

這裡 $\mathcal{H}_j$, $j = 1, \ldots, k$ 為二維斜對稱度量子空間, 而 $\langle , \rangle$ 在其上對應的矩陣為

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

也就是說, 在 $\mathcal{V}$ 中取到一組基底, 使得 $\langle , \rangle$ 對應的矩陣為

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此, 非奇異的斜對稱度量向量空間的維數都是偶數。

用矩陣的語言表達為: 若 P 是一個 n 階非奇異的斜對稱矩陣, 則 P 相合於 M, 即存在

n 階非奇異矩陣 Q, 使得

$$P = Q^T \begin{bmatrix} N_2 & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & N_2 & \dots & O_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & \dots & N_2 \end{bmatrix} Q.$$

這裡 O_2 爲2階零矩陣。所以, 非奇異斜對稱矩陣一定是偶數階, 即 n 是偶數。

f. 下面我們對正交幾何之正交分解作進一步之討論

若 $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$ 是一非奇異的對稱度量向量空間, 則存在非零向量 $\vec{u} \in \mathcal{V}$ 使得 $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \neq 0$, 這樣的 $\vec{u}$ 一定存在, 否則 $\langle , \rangle$ 是斜對稱的。由 $\vec{u}$ 生成的子空間 $\mathcal{S}_1 = \mathrm{span}\{\vec{u}\}$ 是非奇異的。由於 $\mathcal{V}$ 是非奇異, 由定理2.3.3有正交分解 $\mathcal{V} = \mathcal{S}_1 \oplus_\perp \mathcal{S}_1^\perp$, 而 $\mathcal{S}_1^\perp$ 仍爲非奇異的對稱度量向量空間, 我們可以繼續對 $\mathcal{S}_1^\perp$ 進行這樣的正交分解

$$\mathcal{V} = \mathcal{S}_1 \oplus_\perp \mathcal{S}_2 \oplus_\perp \mathcal{S}_2^\perp,$$

這裡 $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ 都是一維的子空間, 重複這樣的步驟, 可得

$$\mathcal{V} = \mathcal{S}_1 \oplus_\perp \mathcal{S}_2 \oplus_\perp \cdots \oplus_\perp \mathcal{S}_n,$$

這裡 $\mathcal{S}_j$ 由向量 $\vec{u}_j$ 生成, 且 $\langle \vec{u}_j, \vec{u}_j \rangle \neq 0$, $j = 1, \dots, n$, 故 $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一組正交基底 (即基底中向量相互正交)。若 $\langle \vec{u}_j, \vec{u}_j \rangle = a_j$, $j = 1, \dots, n$, 則有如下結論。

若 $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$ 是 n 維非奇異的對稱度量向量空間, 則 $\mathcal{V}$ 有一組正交基底 $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$, 使得在基底 $\mathcal{B}$ 下, 所對應的矩陣爲

$$M_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

若取 $0 \neq r_j \in \mathbb{F}$, $j = 1, \dots, n$, 則 $\mathcal{C} = \{r_1\vec{u}_1, \dots, r_n\vec{u}_n\}$ 也是一組正交基底, 對基底 $\mathcal{C}$, $\langle , \rangle$ 所對應的矩陣爲

$$M_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} r_1^2 a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2^2 a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n^2 a_n \end{bmatrix}.$$

若 $\mathbb{F}$ 爲代數封閉體 (algebraically closed field), 即 $\mathbb{F}[x]$ 中任一多項式均可在 $\mathbb{F}$ 上分解爲一次因子的乘積, 這時, 可取

$$r_j = \frac{1}{\sqrt{a_j}}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

這裡 $\sqrt{a_j}$ 爲 $x^2 - a_j = 0$ 的根, 這樣

$$M_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n,$$

這裡 I_n 爲 n 階單位矩陣。歸納起來就有如下定理

定理 2.3.5: 若 $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$ 爲體 $\mathbb{F}$ 上 n 維非奇異的對稱度量向量空間, 則 $\mathcal{V}$ 有正交基底 $\mathcal{U} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, 即 $\mathcal{V}$ 可正交分解爲

$$\mathcal{V} = \mathcal{S}_1 \oplus_\perp \mathcal{S}_2 \oplus_\perp \cdots \oplus_\perp \mathcal{S}_n,$$

這裡 $\mathcal{S}_j$ 是由 $\vec{v}_j$ 生成, $j = 1, \ldots, n$, 若 $\langle \vec{u}_j, \vec{u}_j \rangle = a_j$, 則 $\langle , \rangle$ 相對于基底 $\mathcal{U}$ 有矩陣

$$M_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

若 $\mathbb{F}$ 爲代數封閉體, 則 $\mathcal{V}$ 有一組正規正交基底 (orthonormal basis)(即若基底爲 $\mathcal{U} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, 則 $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_k \rangle = \delta_{jk}$, $j, k = 1, \ldots, n$), $\langle , \rangle$ 相對於基底 $\mathcal{U}$ 有矩陣 $M_{\mathcal{U}} = I_n$, 這裡 I_n 爲 n 維單位矩陣。

用矩陣語言表達爲: 若 P 是 n 階非奇異的對稱矩陣, 則 P 相合於對角矩陣

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

這裡 $a_j \neq 0,\ j = 1, \ldots, n$; 即存在 n 階非奇異矩陣 Q, 使得

$$P = Q^T \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{bmatrix} Q.$$

若 $\mathbb{F}$ 爲代數封閉體, 則 P 相合於 I_n, 即 P 可以寫成 $P = Q^T Q$, 這裡 Q 爲 n 階非奇異矩陣。

若 $\mathbb{F}$ 爲實數體 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 雖然不是代數封閉體, 但可取

$$r_j = \frac{1}{\sqrt{|a_j|}}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

於是

$$M_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix},$$

即在主對角線上的元素, 一部分爲 $+1$, 一部分爲 -1, 也就是 $\mathcal{V}$ 有一組正規正交基底 $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-k}\}$, 而 $\langle \vec{u}_j, \vec{u}_j \rangle = 1$, $j = 1, \ldots, k$, $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle = -1$, $j = 1, \ldots, n-k$。

下面要證 k 由 $\langle , \rangle$ 唯一決定, 而與 $\mathcal{V}$ 的基底的選擇無關。記

$$\mathcal{W} = \mathrm{span}\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}, \qquad \mathcal{P} = \mathrm{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-k}\}.$$

若 $\vec{w} = \sum_{l=1}^k w_l \vec{u}_l \in \mathcal{W}$, 則

$$\begin{aligned} \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle &= \Big\langle \sum_{l=1}^k w_l \vec{u}_l, \sum_{m=1}^k w_m \vec{u}_m \Big\rangle = \sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^k w_l w_m \langle \vec{u}_l, \vec{u}_m \rangle = \sum_{l,m=1}^k w_l w_m \delta_{lm} \\ &= \sum_{l=1}^k w_l^2 \geq 0. \end{aligned}$$

同樣可證: 若 $\vec{p} \in \mathcal{P}$, 則 $\langle \vec{p}, \vec{p} \rangle \leq 0$。如果 $\mathcal{V}$ 有另一組正交基底, $\{\vec{u}'_1, \ldots, \vec{u}'_\ell, \vec{v}'_1, \ldots, \vec{v}'_{n-\ell}\}$, 而 $\langle \vec{u}'_j, \vec{u}'_j \rangle = 1$, $j = 1, \ldots, \ell$, $\langle \vec{v}'_j, \vec{v}'_j \rangle = -1$, $j = 1, \ldots, n-\ell$, 記

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \mathrm{span}\{\vec{u}'_1, \ldots, \vec{u}'_\ell\}, \qquad \widetilde{\mathcal{P}} = \mathrm{span}\{\vec{v}'_1, \ldots, \vec{v}'_{n-\ell}\}.$$

則
$$\mathcal{W} \cap \widetilde{\mathcal{P}} = \{\vec{0}\}.$$
這是因爲: 若 $\vec{w} \in \mathcal{W} \cap \widetilde{\mathcal{P}}$, 則由於 $\vec{w} \in \mathcal{W}$, 我們有 $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \geq 0$; 但另一方面 $\vec{w} \in \widetilde{\mathcal{P}}$, 我們有 $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \leq 0$, 因此, $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0$, 故 $\vec{w} = \vec{0}$。由於 $\mathcal{W}$ 與 $\widetilde{\mathcal{P}}$ 均爲子空間, 且其交集合爲 $\{\vec{0}\}$, 故由命題2.1.4,
$$\dim(\mathcal{W}) + \dim(\widetilde{\mathcal{P}}) \leq \dim(\mathcal{V}),$$
即 $k + (n - \ell) \leq n$, 也就是 $k \leq \ell$。同理可證 $\ell \leq k$, 故 $\ell = k$。歸納起來, 我們有如下定理:

定理2.3.6 (Sylvester 慣性定理): 若 $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$ 爲 n 維實數體 $\mathbb{R}$ 上的非奇異的對稱度量向量空間, 則 $\mathcal{V}$ 有正交基底 $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-k}\}$, 使得 $\langle \vec{u}_j, \vec{u}_j \rangle = 1$, $j = 1, \ldots, k$, $\langle \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle = -1$, $j = 1, \ldots, n-k$; 在基底 $\mathcal{B}$ 下, $\langle , \rangle$ 的矩陣爲
$$M_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{bmatrix},$$
這裡 k 由 $\langle , \rangle$ 唯一決定, 而與 $\mathcal{V}$ 的基底之選取無關。

用矩陣語言表達爲:

若 P 爲實數體 $\mathbb{R}$ 上的非奇異的對稱矩陣, 則 P 相合於
$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{bmatrix},$$
這裡 k 由 P 唯一決定, 即存在 n 階非奇異的對稱矩陣 Q, 使得
$$P = Q^T \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{bmatrix} Q.$$
如果用雙線性形式的語言來說, 則 e 與 f 可以總結爲如下的結論。

若 $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$ 爲數體 $\mathbb{F}$ 上的 n 維非奇異度量空間, 則

(i). 若 $\langle , \rangle$ 爲斜對稱, 則存在 $\mathcal{V}$ 上的一組基底 $\mathcal{B}$, 使得對任意 $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathcal{V}$, 有
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_2 - x_2 y_1 + \cdots + x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1},$$
這裡 $[x_1, \ldots, x_n]^T$ 與 $[y_1, \ldots, y_n]^T$ 分別爲 $\vec{x}, \vec{y}$ 在基底 $\mathcal{B}$ 下的座標。

(ii). 若 $\langle , \rangle$ 爲對稱, 則存在 $\mathcal{V}$ 上的一組正交基底 $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$, 使得對任意 $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathcal{V}$, 有
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j y_j,$$

這裡 $[x_1,\ldots,x_n]^T$ 與 $[y_1,\ldots,y_n]^T$ 分別為 $\vec{x}$, $\vec{y}$ 在基底 $\mathcal{B}$ 下的座標, 而 $a_j=\langle\vec{u}_j,\vec{u}_j\rangle$, $j=1,\ldots,n$。若 $\mathbb{F}$ 是代數封閉體, 則存在 $\mathcal{V}$ 的一組正交基底 $\mathcal{B}=\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$, 使得對任意 $\vec{x}$, $\vec{y}\in\mathcal{V}$, 有

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j.$$

若 $\mathbb{F}$ 是實數體 $\mathbb{R}$, 則存在 $\mathcal{V}$ 的一組正交基底 $\mathcal{B}=\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_k,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_{n-k}\}$, 使得對任意 $\vec{x}$, $\vec{y}\in\mathcal{V}$, 有

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\sum_{j=1}^{k}x_jy_j-\sum_{j=k+1}^{n}x_jy_j,$$

這裡 $[x_1,\ldots,x_n]^T$ 與 $[y_1,\ldots,y_n]^T$ 分別為 $\vec{x}$, $\vec{y}$ 在基底 $\mathcal{B}$ 下的坐標, 而 k 只與 $\langle,\rangle$ 有關, 而與 $\mathcal{V}$ 的基底之選取無關。特別對二次型式 $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle$ 可表為

$$\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j^2.$$

當 $\mathbb{F}$ 是代數封閉體時,

$$\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=\sum_{j=1}^{n}x_j^2.$$

當 $\mathbb{F}$ 是實數體 $\mathbb{R}$ 時,

$$\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=\sum_{j=1}^{k}x_j^2-\sum_{j=k+1}^{n}x_j^2.$$

2.4內積空間

當 $\mathbb{F}$ 是實數體 $\mathbb{R}$ 或複數體 $\mathbb{C}$ 時, $\mathcal{V}$ 就是大家十分熟悉的歐氏空間, 這是非常重要且有很多應用的內積空間。

定義 2.4.1: 若 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空間, 這裡 $\mathbb{F}$ 是實數體 $\mathbb{R}$ 或複數體 $\mathbb{C}$, 若存在映射

$$\langle,\rangle:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{F}$$

滿足

(a) 正定性 (positive definiteness)：對所有 $\vec{v}\in\mathcal{V}$, 有

$$\langle\vec{v},\vec{v}\rangle\ \geq\ 0.$$

而 $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle=0$ 若且唯若 $\vec{v}=\vec{0}$。

(b) 當 $\mathbb{F}$ 爲 $\mathbb{C}$ 時, 有共軛對稱 (或 Hermite 對稱)

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}.$$

當 $\mathbb{F}$ 爲 $\mathbb{R}$ 時, 有對稱性

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle.$$

(c) 第一座標是線性的 (linearity in the first coordinate) : 對所有的 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ 及 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, 有

$$\langle \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \beta \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

則稱 $\langle , \rangle$ 爲 $\mathcal{V}$ 上的內積 (inner product), 有內積的向量空間稱爲內積空間 (inner product space)。當 $\mathbb{F}$ 爲 $\mathbb{R}$ 時, 稱內積空間爲實歐氏空間, 顯然這是一個正定的非奇異度量空間。

當 $\mathbb{F}$ 爲 $\mathbb{C}$ 時, 稱內積空間爲複歐氏空間, 也稱酉空間 (unitary space)。此時由 (b) 及 (c) 可得:

對所有的 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ 及 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, 有

$$\langle \vec{w}, \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \rangle = \bar{\alpha} \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle + \bar{\beta} \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle,$$

稱爲共軛線性 (conjugate linearity)。因此, 此時 $\langle , \rangle$ 不是雙線性型式, 故 $(\mathcal{V}, \langle , \rangle)$ 不是度量向量空間。

若 $\vec{v} \in \mathcal{V}$, 稱

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

爲 $\mathcal{V}$ 的長度 (length) 或範數 (norm)。若 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, 稱 $\|\vec{u} - \vec{v}\|$ 爲 $\vec{u}, \vec{v}$ 之間的距離 (distance)。記作 $d(\vec{u}, \vec{v})$。有了距離的概念, 就可以在 $\mathcal{V}$ 上定義向量序列的收斂, 集合的閉 (open)、開 (closed)、鄰域 (neighborhood)、緊緻 (compact)、連通 (connectedness)、完備性 (completeness) 以及連續 (continuity) 等概念。還可以有

1. (Cauchy 不等式) 對所有的 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, 有

$$\left| \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \right| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|;$$

2. (三角不等式) 對所有的 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, 有

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|;$$

3. (平行四邊形法則) 對所有的 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, 有

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2;$$

4. (距離的三角不等式) 對所有的 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$, 有

$$d(\vec{u}, \vec{v}) \le d(\vec{u}, \vec{w}) + d(\vec{w}, \vec{v});$$

等等。

我們還可以由範數直接定義範數線性空間。若 $\mathcal{V}$ 是一個向量空間, 且在 $\mathcal{V}$ 上有函數

$$\|\cdot\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R},$$

滿足

a. $\|\vec{v}\| \ge 0$, 且 $\|\vec{v}\| = 0$ 若且唯若 $\vec{v} = \vec{0}$;

b. 對所有 $\alpha \in \mathbb{F}$ 與 $\vec{v} \in \mathcal{V}$, 有 $\|\alpha\,\vec{v}\| = |\alpha|\,\|\vec{v}\|$;

c. 對所有 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, 有

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \le \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

則稱 $\|\cdot\|$ 爲 $\mathcal{V}$ 上的一個範數, $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ 稱爲範數線性空間 (normed linear space)。這是內積空間的一種推廣。對內積空間, 也可以仿照上一節中那樣來定義正交的概念, 只是用內積來代替雙線性型式, 於是可以有正交補空間、正交基底及 Riesz 表示定理等。我們在這裡只敍述 Riesz 表示定理。

若 $\mathcal{V}$ 是一個有限維內積空間, $f \in \mathcal{V}^*$, 則存在唯一的向量 $\vec{x} \in \mathcal{V}$, 使得對任意的 $\vec{v} \in \mathcal{V}$, 有

$$f(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle.$$

有關這個定理之證明及對於內積空間進一步的討論, 我們將在3.3節及3.5節中進行。

—本文作者龔昇任教於中國科技大學; 張德健任教於美國 Georgetown University 數學系—