

1. 已知 $a, b$ 均為整數且 $2a + 3b$ 為17的倍數, 試證 $9a + 5b$ 為17的倍數。 (12%)
2. 設 $\Gamma$ 為橢圓 $4x^2 + 9y^2 - 8x - 18y - 23 = 0$ ,  $L$ 為直線 $y = x + k$ , (16%)
  - (i) 若二者相切, 則 $k = ?$
  - (ii) 若 $L$ 交 $\Gamma$ 於 $P, Q$ 二點, 則 $\overline{PQ}$ 之最大值為何?
3. 設 $a, b, c$ 為 $\triangle ABC$ 之三邊長, (16%)
  - (i) 若 $\frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} = 1$ 則 $\angle A = ?$
  - (ii) 若 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{BC} \cdot \vec{CA}$ , 則 $\triangle ABC$ 的形狀為何?
4. 試證:  $\forall x > 0, 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ 。 (14%)
5. 渡船三艘, 每艘最多可載5人, 若8個人要同時安全過渡, 方法有多少種? (12%)  
(請詳細寫出你的思考過程, 只寫出算式或答案, 不予計分)
6. 設 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 等 $n$ 個人以循環賽比賽腕力, 只有勝負, 沒有和局。對於任意 $i = 1, 2, \dots, n$ , 設 $a_i$ 勝 $x_i$ 場, 負 $y_i$ 場, 證明:  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$ 。 (14%)
7. 令 $x_0 = 0, x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + x_1}, \dots, x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, \dots$ , (16%)
  - (i) 證明:  $x_n \leq 2, \forall n = 0, 1, 2, \dots$ 。
  - (ii) 令 $r_n = x_{n+1} - x_n, \forall n = 0, 1, 2, \dots$ , 證明:  $r_n \geq 0, \forall n = 0, 1, 2, \dots$ 。