

本測驗為計算與證明，請將演算過程寫在答案紙，務必標明題號：

1. 設  $a$  為實數且  $x^4 + 2ax^2 - a + 2 = 0$ ，無實數解，求  $a$  的範圍。 (12分)
2. 已知  $1, \sin \theta, \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) 為  $x^3 + px + q = 0$  之三根，求  $p, q, \theta$  之值。 (12分)
3. 若  $a, b > 0$  且  $a + b = 1$  證明  $1/a + 1/b \geq 4$  並求  $(a + 1/a)^2 + (b + 1/b)^2$  之最小值。 (12分)
4. 從小於 100 的正整數中，任取二數  $m, n$ ，試問  $mn > 1000$ ，且  $m + n = 100$  之機率為何？ (12分)
5. 設  $P$  為橢圓  $x^2/9 + y^2/4 = 1$  上的點，其座標為  $(9/5, 8/5)$ ，求過  $P$  點的切線方程式，並求橢圓在該切線上的投影長。 (12分)
6. 設  $f(\theta) = 2\sin 2\theta \sin \theta + 3\sin^2 \theta - 4\sin^2(\theta/2)$ 
  - (a). 若  $t = \cos \theta$ ，將  $f(\theta)$  寫成  $t$  的函數。
  - (b). 求上式之最大值和最小值。 (20分)
7. (a). 證明： $\ln y \leq y - 1$  ( $y > 0$ )  
 (b). 若函數  $f(x), g(x)$  滿足  $f(x) > 0, g(x) > 0$  ( $0 \leq x \leq 1$ )  
 且  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = 1$ ，證明  $\int_0^1 f(x) \ln g(x) dx \leq \int_0^1 f(x) \ln f(x) dx$  (20分)