

1. (a) double  $x, y;$

$$x = \text{sqrt}(2); \quad (x = \sqrt{2})$$

$$y = x * x; \quad (y = x^2)$$

上面程式執行結果一般  $y$  不會等於 2. 請說明理由.

(5%)

(b) 請說明如何運用四則運算求  $\sin(2.0)$  之近似值.

(5%)

2. (a) 函數  $f(x)$  定義在  $[-h, h]$  上, 而  $|f''(x)| \leq M$  且  $f(-h) = 0, f(h) = 0$ , 證明  $|f(x)| \leq \frac{Mh^2}{2}$ .

(10%)

(b) 函數  $f(x)$  在  $[0, \ell]$  上二次可微且  $|f''(x)| \leq M$ , 而  $f^*(x)$  為  $f(x)$  在  $[0, \ell]$  上之一片斷線性內叉函數;  $f^*(x)$  定義如下

$$f^*(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}(x - x_{i-1}), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

其中  $x_k = kh, k = 0, 1, \dots, n, h = \frac{\ell}{n}, n$  為一正整數. 利用 (a) 之結果求最大可能誤差  $\max_{x \in [0, \ell]} |f(x) - f^*(x)|$  與  $n$  之關係.

(10%)

3. 敘述以下各數值方法, 請詳細解釋應用於何種問題, 並簡述其演算法

(40%)

(a) 高斯消去法 (Gaussian elimination)

(b) Cubic spline 內叉法 (Cubic spline interpolation)

(c) 辛普森法 (Simpson's rule)

(d) A Runge-Kutta method (任何一種 order 均可).

4. 矩陣  $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ , 二維向量  $X$  與  $b$ , 令  $AX = b$ , 若  $y$  為  $X$  之近似值而

$$\frac{\|b - Ay\|}{\|b\|} = \epsilon, \text{ 其中 } \|b\| = \sqrt{b^T b}, \text{ 問相對誤差 } \frac{\|y - X\|}{\|X\|} \text{ 之可能範圍.}$$

(若你使用定理, 請敘述該定理之內容)

(20%)

5. 數值積分必須依靠基本積分公式 (quadrature rules), 以下為一 5 點積分公式

$$\int_{-h}^h f(x) dx = a_1 f(-h) + a_2 f(-\frac{h}{2}) + a_3 f(0) + a_4 f(\frac{h}{2}) + a_5 f(h)$$

求令此公式正確之  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ .

(10%)